単位円に関する反転とその応用

高木　和久*

Inversion with Respect to the Unit Circle

Kazuhisa TAKAGI

Summary

Inversion with respect to a circle is one of the most famous transformations. It equals the map $f{:}z\to\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$ on the complex plane. This transformation is closely related to engineering. For example, the principle of Peaucellier straight line motion mechanism is an inversion with respect to a circle. In this paper some applications to lessons of mathematics will be shown.

Key Words: inversion with respect to a circle, AM-GM-HM inequalities, addition formula, trigonometric equation

1.まえがき

平面上の点$P(x,y)$を点$P'(X,Y)$にうつす次の変換

$$\begin{cases} X = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ Y = \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

を単位円に関する反転という。本論文ではこの変換をfで表すことにする。

$$X^2+Y^2 = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2 = \frac{1}{x^2+y^2}$$

であるから$OP\cdot OP'=1$が成り立つ。また

$$\frac{\overrightarrow{OP}}{|OP|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{x^2+y^2}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2}}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{\overrightarrow{OP'}}{|OP'|}$$

であるから3点O, P, P'は1直線上にある。

＊　高知工業高等専門学校総合科学科准教授

例えば極方程式$r=\frac{1}{1+\cos\theta}$の表す放物線を単位円に関して反転させるとカージオイド$r=1+\cos\theta$となる。（図1）

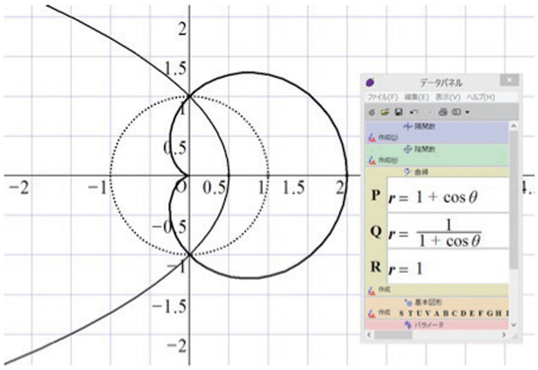

図1. 放物線とカージオイド

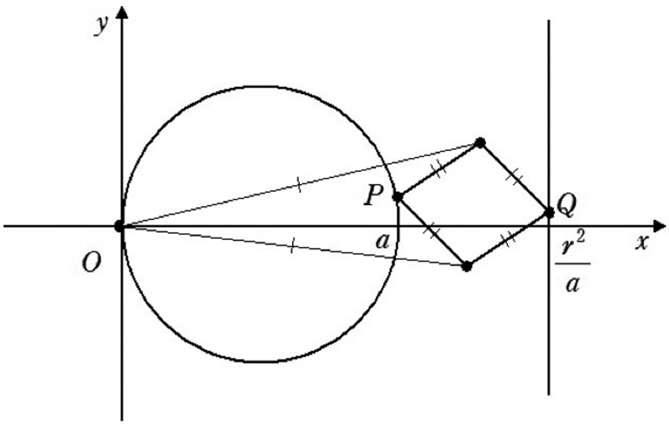

図2. ポースリエの機構の図式

円に関する反転は、工学の色々な分野に応用例がある。例えば、図2はポースリエの機構と呼ばれる回転運動を直線運動に変換する装置の図式である。点Pが円$x^2+y^2=ax$上を動くときの点Qの軌跡は直線$x=\frac{r^2}{a}$となるが、この直線は円$x^2+y^2=ax$を円$x^2+y^2=r^2$に関して反転させたものである。また、$R(\Omega)$の抵抗と$L(\mathrm{H})$のインダクタが直列に接続してある直列回路に周波数$f(\mathrm{Hz})$の正弦波交流電圧を加えるとき、この回路のインピーダンスZは$Z=R+2\pi fLi$で表される。アドミタンスはインピーダンスの逆数で

$$\frac{1}{Z}=\frac{1}{R+2\pi fLi}=\frac{R-2\pi fLi}{R^2+(2\pi fL)^2}$$

である。一般に複素数平面上で点zを単位円$|z|=1$に関して反転させた点は$f(z)=\frac{1}{\bar{z}}=\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$である。つまり$\frac{1}{z}=\overline{f(z)}$が成り立つので、単位円に関する反転は交流電気回路とも関連がある。本論文では、高専で履修する数学の中で単位円に関する反転の知識が役に立つ色々な事例について考察する。

2.AM-GM-HM不等式の証明

$0<a\leq b$とする。 $\frac{a+b}{2}$をa, bの相加平均(Arithmetic Mean)、$\sqrt{ab}$をa, bの相乗平均(Geometric Mean)、$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2ab}{a+b}$ をa, bの調和平均(Harmonic Mean)という。そして不等式

$$\frac{2ab}{a+b}\leq\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$$

をAM-GM-HM不等式という。本章ではこの不等式を幾何的に証明する。

半径 $\frac{a+b}{2}$ の円

$$\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+(y-\sqrt{ab})^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

は点$(0,\sqrt{ab})$でy軸に接する。(図3)よって不等式

$$\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$$

が成り立つ。また$a=b$の時に限り等号が成立する。

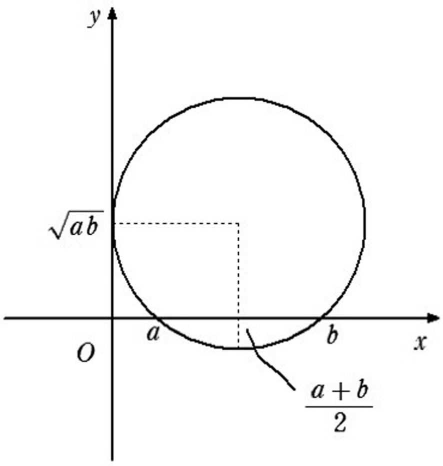

図3.不等式 $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$ を表す図

次に不等式

$$\frac{2ab}{a+b}\leq\sqrt{ab}$$

を証明しよう。この不等式は

$$\frac{1}{\sqrt{ab}}\leq\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$$

と同値である。円

$$\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+(y-\sqrt{ab})^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

を単位円に関して反転させることにより、この不等式を証明することができる。

式を展開すると

$$x^2-(a+b)x+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+y^2-2\sqrt{ab}\,y+ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$x^2+y^2-(a+b)x-2\sqrt{ab}\,y+ab=0$$

両辺をx^2+y^2で割ると

$$1-(a+b)\frac{x}{x^2+y^2}-2\sqrt{ab}\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{ab}{x^2+y^2}=0$$

$X=\frac{x}{x^2+y^2}$,$Y=\frac{y}{x^2+y^2}$ とおくと、

$$1-(a+b)X-2\sqrt{ab}\,Y+ab\left(X^2+Y^2\right)=0$$

更に両辺をabで割ると

$$X^2+Y^2-\frac{(a+b)}{ab}X-\frac{2\sqrt{ab}}{ab}Y+\frac{1}{ab}=0$$

$$X^2-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)X+Y^2-\frac{2}{\sqrt{ab}}Y+\frac{1}{ab}=0$$

$$X^2-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)X+\left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\right)^2+Y^2-\frac{2}{\sqrt{ab}}Y+\frac{1}{ab}=\left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\right)^2$$

$$\therefore\left(X-\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\right)^2+\left(Y^2-\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)^2=\left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\right)^2$$

これは中心 $\left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2},\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)$ 、半径 $\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$ の円となる。（図4）

よって不等式

$$\frac{1}{\sqrt{ab}}\le\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$$

が成り立つ。等号成立は$a=b$のときである。

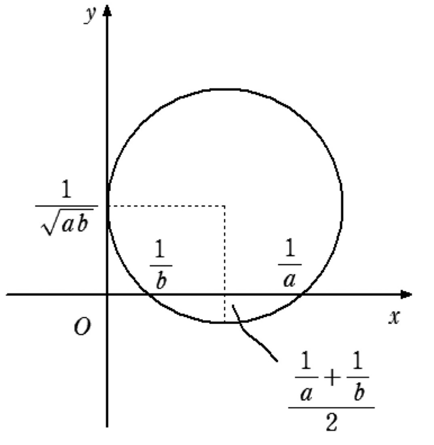

図4. 不等式 $\frac{1}{\sqrt{ab}}\le\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$ を表す図

3.加法定理の証明に関して

三角関数の加法定理

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

を2通りの方法で証明する。2点A$(\cos\alpha, \sin\alpha)$,B$(-\sin\alpha, \cos\alpha)$は単位円上にあり、$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$であるから、$\overrightarrow{OB}$は$\overrightarrow{OA}$と直交する単位ベクトルである。(図5)

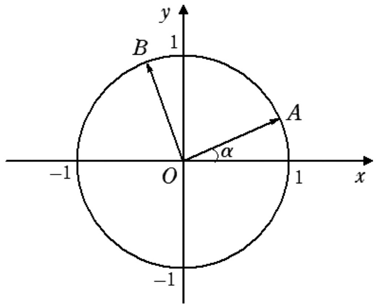

図5. $\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{OB}$

証明1

点Aにおける単位円の接線をℓとする。$\overrightarrow{OB}$はℓの方向ベクトルであるからℓ上の任意の点を$P(x, y)$とすると$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$を満たす実数$t$が存在する。$|\overrightarrow{OB}|=1$であるから$PA=|t|$が成り立つ。$\ell$上に点$P$を$OP$と$OA$の成す角が$\beta$であるようにとる。(図6)

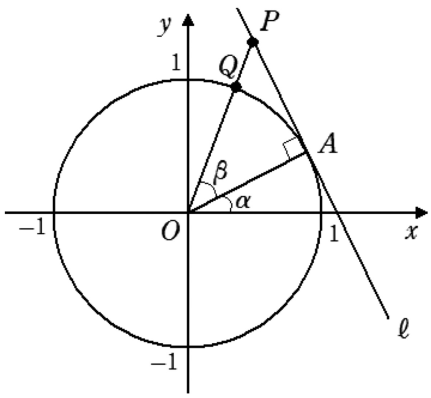

図6. 証明1の図

このとき$PA=\tan\beta$であるから

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+PA\cdot\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}+\tan\beta\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha-\sin\alpha\tan\beta\\ \sin\alpha+\cos\alpha\tan\beta\end{pmatrix}$$

である。OPと単位円の交点をQとするとQの座標は$(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$である。

一方 $|OQ|=1$であるから、$\cos\beta=\frac{OA}{OP}=\frac{1}{OP}$ より

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{\overrightarrow{OP}}{OP}=\cos\beta\cdot\overrightarrow{OP}=\cos\beta\begin{pmatrix}\cos\alpha-\sin\alpha\tan\beta\\ \sin\alpha+\cos\alpha\tan\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\end{pmatrix}$$

(証明終)

証明2

原点と点Aを直径の両端とする円上に$\angle POA=\beta$となるように点Pをとる。半直線OPと単位円との交点をQとするとQの座標は$(\cos(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\beta))$である。(図7)
∠OPAは直角であるから$OP=\cos\beta$が成り立つ。
Pから線分OAにおろした垂線の足をRとすると$OR=\cos^2\beta$が成り立つので

$$\overrightarrow{OR}=|\overrightarrow{OR}|\cdot\overrightarrow{OA}=\cos^2\beta\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\ \cos^2\beta\\ \sin\alpha\ \cos^2\beta\end{pmatrix}$$

また、$RP=\sin\beta\ \cos\beta$より$\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{RP}\cdot OB=\sin\beta\ \cos\beta\overrightarrow{OB}$であるから

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{OR}+\sin\beta\cos\beta\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\ \cos^2\beta-\sin\alpha\ \sin\beta\ \cos\beta\\ \sin\alpha\ \cos^2\beta+\cos\alpha\ \sin\beta\ \cos\beta\end{pmatrix}$$

よって

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{\overrightarrow{OP}}{OP}=\frac{\overrightarrow{OP}}{\cos\beta}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\ \cos\beta-\sin\alpha\ \sin\beta\\ \sin\alpha\ \cos\beta+\cos\alpha\ \sin\beta\end{pmatrix}$$

(証明終)

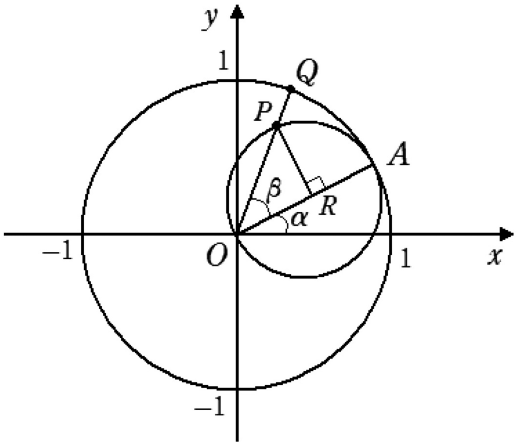

図7. 証明2の図

証明1では点Aにおける単位円の接線ℓを用いたが、ℓを単位円に関して反転させた図形は原点と点Aを直径とする円である。そして、証明1の点Pを反転させると証明2の点Pとなる。つまり単位円に関する反転を用いると、加法定理の1つの証明から別の証明を作り出すことができる。

4.点と直線の距離を求める

点(x_0,y_0)と直線$ax+by+c=0$の距離を求めよう。点と直線をいずれもx軸方向へ$-x_0$、y軸方向へ$-y_0$平行移動させる。点(x_0,y_0)は原点に、直線$ax+by+c=0$は直線

$$a(x+x_0)+b(y+y_0)+c=0$$

$$\therefore ax+by=-ax_0-by_0-c$$

にうつされる。この直線をℓとおき、原点Oから直線ℓにおろした垂線の足Pとする。OPの長さは点(x_0,y_0)と直線$ax+by+c=0$の距離に等しい。

点Pを単位円に関して反転させた点をQとすると、直線ℓはこの反転によってOとQを直径の両端とする円にうつされる。(図8)

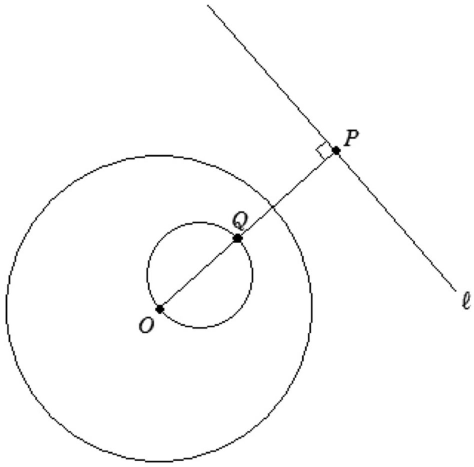

図8.直線ℓを単位円に関して反転させる

この円の方程式を求めよう。

$x=\frac{X}{X^2+Y^2}$, $y=\frac{Y}{X^2+Y^2}$ を $ax+by=-ax_0-by_0-c$ に代入して

$$a\frac{X}{X^2+Y^2}+b\frac{Y}{X^2+Y^2}=-ax_0-by_0-c$$

ここで $d=-ax_0-by_0-c$ とおく。$d=0$ のときは点 (x_0, y_0) は直線 $ax+by+c=0$ 上にあるので距離は0である。以下 $d\neq 0$ とする。

$$a\frac{X}{X^2+Y^2}+b\frac{Y}{X^2+Y^2}=d$$

$$d(X^2+Y^2)=aX+bY$$

$$X^2+Y^2=\frac{a}{d}X+\frac{b}{d}Y$$

$$\therefore\left(X-\frac{a}{2d}\right)^2+\left(Y-\frac{b}{2d}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4d^2}$$

これより

$$OQ=2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4d^2}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|d|}$$

Qは単位円に関してPを反転させた点であるから

$$OP=\frac{1}{OQ}=\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-ax_0-by_0-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

5.極方程式を用いた三角方程式の解法

三角方程式 $\sin\theta=\sqrt{3}\cos\theta$ $(0^\circ\leq\theta\leq 180^\circ)$ を極方程式と単位円に関する反転を用いて解こう。極方程式で表された2曲線 $r=\sin\theta$ および $r=\sqrt{3}\cos\theta$ はいずれも円を表す。(図9)この2円の交点をAとするとOAがx軸の正の向きと成す角が三角方程式 $\sin\theta=\sqrt{3}\cos\theta$ の解である。しかし、図9からこの角を求めるのは困難である。

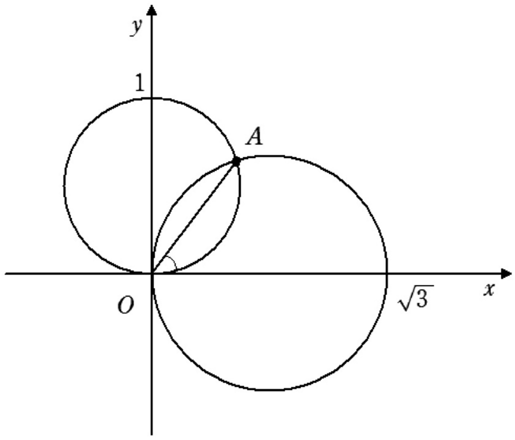

図9. 2円 $r=\sin\theta$、$r=\sqrt{3}\ \cos\theta$

この2円をそれぞれ単位円に関して反転させると2直線$r=\dfrac{1}{\sin\theta}$ 、$r=\dfrac{1}{\sqrt{3}\cos\theta}$ となる。(図10)

2直線の交点をBとするとBの座標は$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},1\right)$であるので$OB$が$x$軸の正の向きと成す角が$60°$であることが容易にわかる。$O,A,B$は1直線上にあるので三角方程式$\sin\theta=\sqrt{3}\ \cos\theta$の解は$\theta=60°$である。

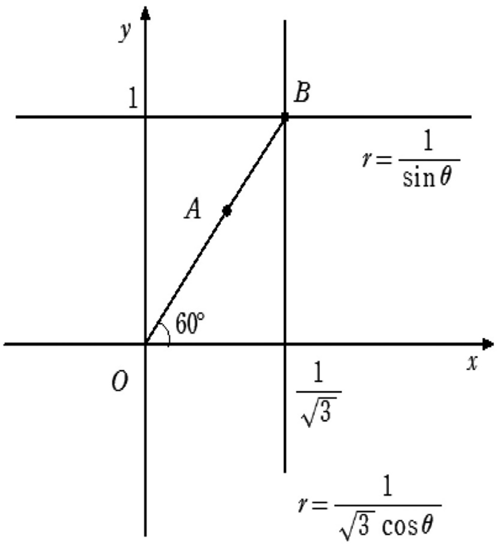

図10. 方程式$\sin\theta=\sqrt{3}\ \cos\theta$の解

6.おわりに

第4章では点(x_0,y_0)と直線$ax+by+c=0$の距離が $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ で与えられることを示した。空間内の点$P(x,y,z)$を点$P'(X,Y,Z)$にうつす次の変換

$$\begin{cases} X=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2} \\ Y=\dfrac{y}{x^2+y^2+z^2} \\ Z=\dfrac{z}{x^2+y^2+z^2} \end{cases}$$

を用いることにより第4章の議論と同様にして点(x_0, y_0, z_0)と平面$ax+by+cz+d=0$の距離が$\dfrac{|ax_0+by_0+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$で与えられることを示すことができる。

第2章で述べたAM-GM-HM不等式の証明は、既に第1学年の授業で実施済である。今後は他の内容についても順次授業に導入してゆきたい。

参考文献

[1] 高木和久、インピーダンスとアドミタンスの連立方程式について、平成23年度全国高専教育フォーラム教育研究活動発表概要集、2011
[2] 電気基礎(下)、文部科学省検定済教科書、コロナ社、2003
[3] 高木和久、三角関数の加法定理の8つの新証明、高知高専学術紀要第57号、PP.35-43、2012
[4] 高木和久、1次変換による点と平面の距離の公式の新証明、高知高専学術紀要第60号、PP.23-31、2015
[5] 高木和久、1次変換による直線の像と点と直線の距離の公式、日本数学教育学会第40回研究発表会、2015
[6] 高木和久、1次変換による直線の像と点と直線(平面)の距離の公式、初等数学第77号、PP.64-66、2015

(2015年10月26日　受理)