余因子行列を用いた行列のべき乗の計算とその応用

高木　和久*

Calculating n-th Power of a Matrix by Cofactor Matrix

Kazuhisa TAKAGI

Summary

Suppose that A be a square matrix of degree two. Many methods are known to calculate the n-th power of A. In this paper, a new easy way is shown. It uses the cofactor matrix of A. Eigenvalues and eigenvectors are also easily calculated. A normal form of a quadratic form also can be calculated by cofactor matrix. In 2014, I used this method in a lesson of linear algebra to solve some entrance examinations of universities. Students learned the method quickly and solved the problems.

Key Words: matrix, power of matrix, eigenvalue, cofactor matrix, quadratic form

1.まえがき

2次正方行列AについてA^nを求める問題は大学入試で多数出題されてきた問題であり、多くの解法が知られている。高専で使用される線形代数の教科書ではAの固有値α,βと行列Pを用いて行列Aを

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$$

のように対角化し、

$$A^n=P\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \beta^n\end{pmatrix}P^{-1}$$

としてA^nを求めている。本論文ではA^nの新しい計算方法を紹介すると共に、その応用について述べる。

＊　高知工業高等専門学校総合科学科准教授

2. 余因子行列の活用

行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$の余因子行列を$\tilde{A}$で表すとき、

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$$

である。単位行列をEで表すことにすると

$$A+\tilde{A}=tr(A)\cdot E, A\tilde{A}=\tilde{A}A=|A|\cdot E$$

が成り立つ。余因子行列は通常は$|A|\neq 0$のときに

$$A^{-1}=\frac{\tilde{A}}{|A|}$$

という形で用いられるが、ここでは$|A|=0$の場合に注目する。このとき、

$$A\tilde{A}=\tilde{A}A=O$$

が成り立つ。また、Cayley-Hamiltonの定理

$$A^2-tr(A)\cdot A+|A|\cdot E=O$$

より、$tr(A)=1$ かつ $|A|=0$ のとき $A^2=A$ が成り立つ。

kが行列Aの固有値であるとき、$B=A-kE$とおくと$|B|=0$である。このBを用いてA^nを計算することができる。まず、$tr(B)=0$のときは$B^2=O$であるから

$$A^n=(kE+B)^n=k^nE+nk^{n-1}B$$

としてA^nを求めることができる。また、$tr(B)\neq 0$のときは

$$P=\frac{B}{tr(B)}$$

とおくと$tr(P)=1$かつ$|P|=0$となるから$P^2=P$が成り立つ。また、

$$\tilde{P}=\frac{\tilde{B}}{tr(B)}, |P|=0, tr(\tilde{P})=1$$

であるから、$(\tilde{P})^2=\tilde{P}$も成り立つ。そして

$$P\tilde{P}=\frac{B}{tr(B)}\cdot\frac{\tilde{B}}{tr(B)}=O$$

同様にして$P\tilde{P}=O$である。更に、

$$P+\tilde{P}=\frac{B}{tr(B)}+\frac{\tilde{B}}{tr(B)}=\frac{tr(B)\cdot E}{tr(B)}=E$$

であるから、

$$\begin{aligned} A&=kE+B=k(P+\tilde{P})+tr(B)P \\ &=\{k+tr(B)\}P+k\tilde{P} \end{aligned}$$

となるので、$\lambda=k+tr(B)$とおくと行列Aは

$$A=\lambda P+k\tilde{P}$$

と表される。このとき、次の定理が成り立つ。

<u>定理1</u> 行列AがPとPの余因子行列$\tilde{P}$を用いて

$$A = \lambda P + k\tilde{P}$$

と表されるとき、次が成り立つ。

（1） $A^n = \lambda^n P + k^n \tilde{P}$

（2）λはAの固有値であり$P\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$は$A$の固有値$\lambda$に属する固有ベクトルである

（3）kはAの固有値であり$\tilde{P}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$は$A$の固有値$k$に属する固有ベクトルである

<u>証明</u>　（1）$P\tilde{P}=\tilde{P}P$であるから2項定理より

$$A^n = (\lambda P + k\tilde{P})^n = \sum_{i=0}^{n} \lambda^{n-i} k^i P^{n-i} (\tilde{P})^i$$

が成り立つ。

$$P^2 = P, (\tilde{P})^2 = \tilde{P}, P\tilde{P} = \tilde{P}P = O$$

であるから、

$$A^n = \lambda^n P + k^n \tilde{P}$$

（2）$AP = (\lambda P + k\tilde{P})P = \lambda P$が成り立つので$\lambda$は$A$の固有値である。また$AP\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \lambda P\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$であるから、$P\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$は$A$の固有値$\lambda$に属する固有ベクトルである。

（3）$A\tilde{P} = (\lambda P + k\tilde{P})\tilde{P} = k\tilde{P}$が成り立つので$k$は$A$の固有値である。また、$A\tilde{P}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = k\tilde{P}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$であるから、$\tilde{P}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$は$A$の固有値$k$に属する固有ベクトルである。

3.授業における実践例

2014年2月に本校の電気情報工学科2年の線形代数において余因子行列を用いてA^nを求める授業を行った。行列の固有値や対角化は第4学年での履修内容であるため第2学年では対角化を使って行列のn乗を求めることができない。この授業では、まず次の例題1について解説した。

<u>例題1</u>　$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}$のとき$A^n$を求めよ。　（筑波大2011）

この問題の通常の解法を以下に示す。まずAの固有値λを固有方程式$|\lambda E - A| = 0$を解くことによって求める。

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

であるから、固有値は1と3である。

Aは対称行列であるから対角化可能である。固有値1に属する固有ベクトルを$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$とすると

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を満たすことから$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$が固有値1に属する固有ベクトルであることがわかる。同様に$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$は固有値3に属する固有ベクトルである。

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$とおくと$|P| = -2$で、

$$P^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

だから

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^n & 1-3^n \\ 1-3^n & 1+3^n \end{pmatrix}$$

次に、本論文で示した余因子行列を用いる解法を述べる。通常の解法に比べて計算量が大幅に減少していることがわかる。

解　$A = P\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 3E - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

だから $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$とおくと

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B + \tilde{B} = 2E$$

となる。更に$P = \frac{1}{2}B$とおくと、

$$\tilde{P} = \frac{1}{2}\tilde{B}, P + \tilde{P} = E, P^2 = P, (\tilde{P})^2 = P$$

が成り立つ。

$$A = 3E - B = 3(P + \tilde{P}) - 2P = P + 3\tilde{P}$$

であるから、

$$A^n = (1\cdot P + 3\cdot\tilde{P})^n = 1^n\cdot P + 3^n\cdot\tilde{P} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^n & 1-3^n \\ 1-3^n & 1+3^n \end{pmatrix}$$

授業では、この方法で例題1を解いて見せた後に、練習問題1、2を学生に解かせた。

練習問題1 $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ のとき A^nを求めよ　（静岡大2010）

練習問題2 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$のとき A^nを求めよ　（九州芸術工科大2001）

机間巡視を行って学生の理解の程度を観察したが、ほとんどの学生が順調に問題を解いていた。

4.漸化式で定義される数列の一般項

第3節の例題1では行列Aは

$A=1\cdot P+3\cdot\tilde{P}$

と表わされたが、第2節の定理1より1と3はAの固有値である。余因子行列を用いてAを

$A=mP+n\tilde{P}$

と表すことにより、固有方程式を解かずにAの固有値と固有ベクトルを求めることができる。

次の問題（例題2）をこの手法で解いてみよう。

例題2 行列$A=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 8\end{pmatrix}$について、次の問に答えよ。

（1）Aの固有値と固有ベクトルを求めよ。

（2）$Q^{-1}AQ$が対角行列となる直交行列Qを求めよ。

（3）数列$\{x_n\},\{y_n\}$を$x_0=1, y_0=0$とし、$n\geq1$に対して

$$\begin{cases} x_n=5x_{n-1}-2y_{n-1}\\ y_n=-2x_{n-1}+8y_{n-1}\end{cases}$$

と定義する。このとき一般項x_n,y_nを求めよ。　（新潟大2003）

解(1) $A=4E+\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$だから $P=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$

とおくと、$\tilde{P}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$であり、

$A=4(P+\tilde{P})+5P=9P+4\tilde{P}$

よって9はAの固有値であり、9に属する固有ベクトルは$kp\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$である。同様に4は$A$の固有値であり4に属する固有ベクトルは$k\tilde{P}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$である。

(2)$Q=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$とおくと$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}9 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$である。

(3) $\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_{n-1}\\ y_{n-1}\end{pmatrix}=\cdots=A^n\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$

である。$A=9P+4\tilde{P}$より$A^n=9^nP+4^n\tilde{P}$となるので

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 9^n P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4^n \tilde{P} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 9^n \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 4^n \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9^n + 4^{n+1} \\ -2 \cdot 9^n + 2 \cdot 4^n \end{pmatrix}$$

例題3 漸化式$a_1=1, a_{n+1}=\frac{3a_n+6}{a_n+4}$で定義される数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

この漸化式は一般分数型と呼ばれ、大学入試問題の中でも難問として知られている。([1])
通常の解法は、$a_{n+1}=a_n=x$とおいて得られる方程式

$$x = \frac{3x+6}{x+4}$$

を解く。この方程式の解は $x=-3, 2$ である。
この2数を用いて漸化式を

$$\frac{a_{n+1}+3}{a_{n+1}-2} = 6 \cdot \frac{a_n+3}{a_n-2}$$

と変形し

$$a_n = \frac{8 \cdot 6^{n-1} - 3}{4 \cdot 6^{n-1} + 1}$$

を得る。この方法でこの問題を解くにはかなりの計算力を必要とするが、本論文の手法を用いると驚くほど簡単に解くことができる。

解 数列$\{b_n\}, \{c_n\}$を、$b_1 = c_1 = 1$および $n \geq 2$に対して

$$\begin{cases} b_n = 3b_{n-1} + 6c_{n-1} \\ c_n = b_{n-1} + 4c_{n-1} \end{cases}$$

を満たす数列とする。$a_n = \frac{b_n}{c_n}$ のとき

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{3a_n + 6}{a_n + 4}$$

が成り立つ。 $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$とおくと

$$\begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \cdots = A^{n-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$A = E + \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$だから$P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$とおくと

$$A = E + 5P = (P + \tilde{P}) + 5P = 6P + \tilde{P}$$

$$A^{n-1} = 6^{n-1}P + \tilde{P}$$

$$\begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6^{n-1} P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tilde{P} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{6^{n-1}}{5} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 8 \cdot 6^{n-1} - 3 \\ 4 \cdot 6^{n-1} + 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ a_n=\dfrac{b_n}{c_n}=\dfrac{8\cdot6^{n-1}-3}{4\cdot6^{n-1}+1}=\dfrac{4\cdot6^n-9}{2\cdot6^n+3}$

5.3次以上の正方行列への応用

大学編入学試験では、3次以上の正方行列の固有値と固有ベクトルを求める問題が多数出題されている。3次以上の行列の場合固有方程式も3次以上であり、その計算にはかなりの時間が必要である。行列Aを $\tilde{A}=mP+n\tilde{P}$と変形する途中において、例題1では

$A=3E+\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$

例題2では

$A=4E+\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$

例題3では

$A=E+\begin{pmatrix}2 & 6\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

のように、$A=kE+B$という形に変形したが、いずれの場合も行列Bは正則でない。

大学編入学試験問題の中にはこの変形を用いて固有値と固有ベクトルを簡単に求めることのできるものが多数含まれている。第5節と第6節では余因子行列は使用しないが、その関連として$A=kE+B$という変形を用いて問題を解く方法を紹介する。

例えば次の問題(例題4)を見てみよう。

例題4 行列$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$の固有値とそれに属する固有ベクトルを求めよ。

(神戸大1994、北海道大1997、京都大2000、島根大2005、
静岡大2006、佐賀大2006、東北大2009、佐賀大2011)

解 $A=E+\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$と変形できるので、$\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$とおくと、$A$は$A=E+\vec{p}\ {}^t\vec{p}$と表される。

このとき

$A\vec{p}=E\vec{p}+\vec{p}\ {}^t\vec{p}\vec{p}=\vec{p}+3\vec{p}=4\vec{p}$

であるから、4はAの固有値で4に属する固有ベクトルは$k\vec{p}$である。

$\vec{p}$に直交する2つのベクトル$\vec{q},\vec{r}$を、例えば

$\vec{q}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\vec{r}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

とおくと$\{\vec{q},\vec{r}\}$は1次独立で、

$A\vec{q}=E\vec{q}+\vec{p}\,{}^t\vec{p}\vec{q}=\vec{q}+0\cdot\vec{p}=\vec{q}$

$A\vec{r}=E\vec{r}+\vec{p}\,{}^t\vec{p}\vec{r}=\vec{r}+0\cdot\vec{p}=\vec{r}$

であるから1はAの固有値で1に属する固有ベクトルは$m\vec{q}+n\vec{r}$である。

例題4のように$A=kE+\vec{p}\ {}^t\vec{p}$の形で表わされる行列$A$の固有値と固有ベクトルを求める問題は他大学でも多数出題されている。次の例題は4次の正方行列に関する問題である。

例題5 行列$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$の固有値とそれに属する固有ベクトルを求めよ。

（京都大1995、筑波大2011、金沢大2011）

解　$\vec{p}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$とおくと

$A=-E+\vec{p}\ {}^t\vec{p}$

$A\vec{p}=-E\vec{p}+\vec{p}\ {}^t\vec{p}\vec{p}=-\vec{p}+4\vec{p}=3\vec{p}$

であるから、3はAの固有値で3に属する固有ベクトルは$k\vec{p}$である。

$\vec{p}$に直交する3つのベクトル$\vec{q},\vec{r},\vec{s}$を、例えば

$$\vec{q}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\vec{r}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\vec{s}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと$\{\vec{q},\vec{r},\vec{s}\}$は1次独立で、

$A\vec{q}=-E\vec{q}+\vec{p}\ {}^t\vec{p}\vec{q}=-\vec{q}+0\cdot\vec{p}=-\vec{q}$

$A\vec{r}=-E\vec{r}+\vec{p}\ {}^t\vec{p}\vec{r}=-\vec{r}+0\cdot\vec{p}=-\vec{r}$

$A\vec{s}=-E\vec{s}+\vec{p}\ {}^t\vec{p}\vec{s}=-\vec{s}+0\cdot\vec{p}=-\vec{s}$

であるから-1はAの固有値で-1に属する固有ベクトルは$l\vec{q}+m\vec{r}+n\vec{s}$である。

6.2次形式の標準形と最大最小問題

余因子行列を用いることにより2次形式の標準形を簡単に求めることができる。まず、次の問題を解いてみよう。

例題6　曲線$7x^2-4xy+7y^2=9$の概形を描け。（大阪大2012）

解　$\vec{p}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},A=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$とおくと

$$7x^2-4xy+7y^2={}^t\vec{p}A\vec{p}$$

と表わされる。

$$A=9E+\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}=9E-2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから、

$$A+2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=9E$$

$${}^t\vec{p}A\vec{p}+2\ {}^t\vec{p}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\vec{p}=9\ {}^t\vec{p}E\vec{p}$$

$$9+2(x+y)^2=9(x^2+y^2)$$

$$\therefore x^2+y^2=1+\frac{2}{9}(x+y)^2$$

これより$x+y=0$のときx^2+y^2は最小値1をとる。

よって$7x^2-4xy+7y^2=9$の内接円は$x^2+y^2=1$で円と曲線との交点は直線$x+y=0$上にある。また、Cauchy-Schwarzの不等式から

$$(x+y)^2\leq(1^2+1^2)(x^2+y^2)=2(x^2+y^2)$$

が成り立つ。等号が成立するのは$x=y$のときで、このとき

$$x^2+y^2=1+\frac{2}{9}(x+y)^2=1+\frac{2}{9}\cdot 2(x^2+y^2)=1+\frac{4}{9}(x^2+y^2)$$

$$\therefore x^2+y^2=\frac{9}{5}$$

となるからx^2+y^2の最大値は$\frac{9}{5}$である。よって曲線の外接円は$x^2+y^2=\frac{9}{5}$で、円と曲線との交点は直線$y=x$上にある。曲線の概形は図1の通りである。

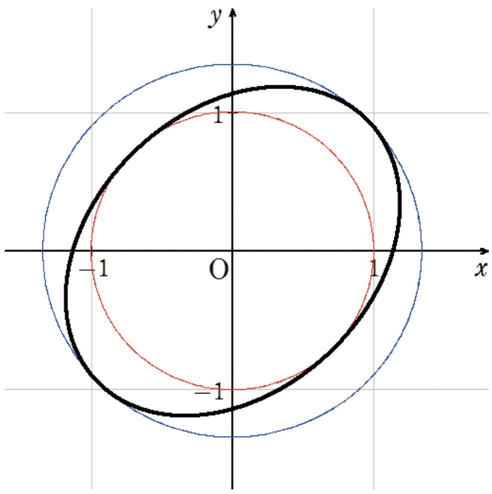

図1. 曲線　$7x^2-4xy+7y^2=9$

例題6において、$P=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$とおくと

$$A=9E-2\cdot 2P=9(P+\tilde{P})-4P=5P+9\tilde{P}$$

ここで5と9はAの固有値である。また、

$${}^t\vec{p}P\vec{p}=u^2,\ {}^t\vec{p}\tilde{P}\vec{p}=v^2$$

とおくと、

$${}^t\vec{p}A\vec{p}=5\ {}^t\vec{p}P\vec{p}+9\ {}^t\vec{p}\tilde{P}\vec{p}=5u^2+9v^2$$

$$\therefore 7x^2-4xy+7y^2=5u^2+9v^2$$

このように、余因子行列を用いて2次形式の標準形を求めることができる。

最後に、2次形式の最大値と最小値を求める次の問題を解いてみよう。

例題7 (1) 対称行列$A=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{pmatrix}$の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(2) 球面$x^2+y^2+z^2=1$上における関数

$$f(x,y,z)=3x^2+3y^2+3z^2+2xy+2yz+2zx$$

の最大値と最小値を求めよ。　(横浜国立大1995)

解　$A=2E+\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ と変形できるので$\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$とおくと、$A=2E+\vec{p}\,{}^t\vec{p}$である。

このとき

$A\vec{p}=2E\vec{p}+\vec{p}\,{}^t\vec{p}\vec{p}=2\vec{p}+3\vec{p}=5\vec{p}$

であるから、5はAの固有値で5に属する固有ベクトルは$k\vec{p}$である。

$\vec{p}$に直交する2つのベクトル$\vec{q},\vec{r}$を、例えば

$\vec{q}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix},\vec{r}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

とおくと$\{\vec{q},\vec{r}\}$は1次独立で、

$A\vec{q}=2E\vec{q}+\vec{p}\,{}^t\vec{p}\vec{q}=2\vec{q}+0\cdot\vec{p}=2\vec{q}$

$A\vec{r}=2E\vec{r}+\vec{p}\,{}^t\vec{p}\vec{r}=2\vec{r}+0\cdot\vec{p}=2\vec{r}$

であるから2はAの固有値で2に属する固有ベクトルは$m\vec{q}+n\vec{r}$である。

(2) $f(x,y,z)=(x\ \ y\ \ z)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$=2(x\ \ y\ \ z)E\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+(x\ \ y\ \ z)\vec{p}\,{}^t\vec{p}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$=2(x^2+y^2+z^2)+(x+y+z)^2$

$=2+(x+y+z)^2$

$(x+y+z)^2\geq 0$であるから、$f(x,y,z)$の最小値は2である。

また、Cauchy-Schwarzの不等式から

$(x+y+z)^2\leq(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)=3$

よって$f(x,y,z)$の最大値は5である。

7.まとめ

本論文では、まず行列のn乗を余因子行列を用いて求める方法を紹介した。この手法では行列AをPとその余因子行列$\tilde{P}$の線形結合で表す。第2章の定理1で述べたように、このときの係数は行列Aの固有値に等しい。

固有値を求める問題では、学生が固有方程式を解く際に式を因数分解する時点でミスをしてしまい、それ以降の計算が全て無駄になってしまう答案を時折見かける。学生は正しく因数分解できていると思い込んでいるので見直しをしても誤りに気づかないのである。第5章で紹介した固有値を

求める方法を学生が知っていると見直しの段階で自分のミスに気付くことができる。第5章と第6章の内容は行列のn乗を求めるものではないが、関連する話題であり、高専の学生と数学科の教員にとって有益な情報であるので本論文に付け加えた。余因子行列の様々な活用方法を知ることで、その有用性が学生に正しく認識されることを期待している。

参考文献

[1] 西元教善:分数型の漸化式についての一考察
http://www.bun- eido.co.jp/t_math/sjournal/sj34/sj340209.pdf

（2015年10月26日　受理）