

## An SDRE method based on extended quadratic Lyapunov function for tendon-driven robotic arms approximated to a bilinear system

Shin NAKAYAMA

### Summary

The state-dependent Riccati equation (SDRE) is an effective nonlinear control method that is similar to linear quadratic regulator (LQR) and does not need complicated procedures compared to other nonlinear control theory. However, the conventional SDRE method has the problem that the solution needs to satisfy the integrability condition of the Hamilton-Jacobi equation and does not give a Lyapunov function directly. In contrast, the SDRE method based on extended quadratic Lyapunov function allows us to evaluate the stability easily because this solution does not have strict conditions and gives a Lyapunov function directly. In this paper, we approximate a tendon-driven robotic arm with nonlinear spring tensioning device (NST) to a bilinear system around a steady state, and apply an SDRE method based on extended quadratic Lyapunov function to this system. We evaluate the performance of this method through several simulations, and compare it with an LQR controller. Finally, we discuss the stability of this controller.

### 1. 緒 言

状態依存リッカチ方程式 (state-dependent Riccati equation: SDRE) 法とは、非線形系を状態依存型線形表現 (state-dependent linear representation: SDLR) で表すことで、各時刻の状態量を SDRE に代入して、線形制御則と同じ形の代数リッカチ方程式をオンラインで解き、解をその時刻のフィードバックゲインとして利用する手法である<sup>1)-3)</sup>。従来使用してきた線形制御則との比較が容易で評価の見通しも立て易く、実装において他の非線形制御理論に対して有利であるということが、SDRE 法の最大の強みである。しかし、一般に論じられている SDRE 法は、非線形制御則ハミルトンヤコビ方程式 (Hamilton-Jacobi equation: HJE) の近似解を求める手法であり、リアプノフ候補関数と SDRE の解を HJE に沿った積分条件を満たす形式に限定するため、解の正定性条件が厳しく、かつ、解が直接リアプノフ関数を与えず安定性が不確かという問題を持っている<sup>4)</sup>。これに対し、拡張二次形式リアプノフ候補関数に基づく SDRE 法は、解が直接リアプノフ関数を与えるため、従来の SDRE 法と比べても安定性の議論が容易に行えるという利点を持つ<sup>4),5)</sup>。

非線形バネ要素 (nonlinear spring tensioning device: NST) を持つ腱駆動機構<sup>6)</sup>は、関節剛性と関節トルクを同時制御可能な機構であり、機械的に衝撃力を吸収できて柔軟性を持つため、将来の介護ロボット現場などの実用に期待されている。しかし、腱駆動ロボットは、関節自由度より駆動

---

\* 高知工業高等専門学校機械工学科助教

装置数が多い駆動冗長システムであり、また、NSTにより複雑な非線形系となるため、制御則の適用において複雑なシステムにもなっている<sup>7),8)</sup>。今後、非線形バネ要素を持つ腱駆動ロボットをより一般的なシステムとするために、従来の線形2次形式と似た手続きによる制御則の適用が望ましいと思われる。そこで本研究では、非線形腱駆動ロボットアームへのSDRE法適用の第一段階として、制御対象を定常点近傍で入力と状態量の積を残した双線形システムとして近似し<sup>9)</sup>、拡張2次形式リアプノフ候補関数に基づくSDRE法を適用して、その効果と安定性を検証する。

本論文は以下のように構成されている。第2章では状態依存型線形表現(SDLR)に対して、拡張2次形式リアプノフ関数に基づいたSDRE法を提示する。第3章で腱駆動ロボットアームの運動方程式を導く。第4章では3章で求めた運動方程式を、定常状態周りの双線形システムとして状態方程式を導く。第5章でシミュレーション実験を行い、第6章で結言を述べる。

## 2. 拡張2次形式リアプノフ関数に基づくSDRE設計

この章では、状態依存型線形表現(SDLR)の非線形システムに対し、拡張2次形式リアプノフ関数に基づくSDRE状態フィードバック制御則を導く。

一般的な非線形システム $\dot{x}=f(x,u)$ を以下のように表現出来る場合、これを状態依存型線形表現(SDLR)と言う。

$$(SDLR) : \dot{x} = A(x)x + B(x)u \quad (1)$$

ここで、 $x \in \mathbb{R}^n$ は状態ベクトル、 $u \in \mathbb{R}^m$ は入力ベクトルである。 $(A(x), B(x))$ は、 $\forall x$ において可制御であるとする。(1)に対し、SDREによる状態フィードバック制御側を提示する。はじめに $\Delta X(x(t)), \Delta X_{sub}(x(t))$ を以下のように定義する。

$$\Delta X(x) := \dot{X}(x) + \Delta X_{sub}(x) - X(x)B(x)R^{-1}B^T(x)X(x) \quad (2)$$

$$\Delta X_{sub}(x) := X(x)A(x) + A^T(x)X(x) - X(x)B(x)R^{-1}B^T(x)X(x) \quad (3)$$

ここで、 $R$ は任意の正定値対称行列であり、 $X(x)$ は次の定理で与えられる正定値対称行列である。

【定理2.1】(i)  $X(x(t))$ は、ある正定値対称行列 $Q$ と、任意の $x$ に対して以下のSDREを満たすとする。

$$(SDRE) : \Delta X_{sub}(x) = -Q \quad (4)$$

(ii)  $X(x(t))$ は次の不等式を満たすとする。

$$\Delta X(x) < 0 \quad (5)$$

この時、以下のコントローラ

$$u = -R^{-1}B^T(x)X(x)x \quad (6)$$

は(SDLR)の内部安定性を保証する。

証明. リアプノフ候補関数 $V$ を以下のような状態量の拡張2次形式で定義する。

$$V(x) = \mathbf{x}^T \mathbf{X}(x) \mathbf{x} \quad (7)$$

$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{x}$ に注意すると、 $V$ の時間微分は以下で表せる。

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{X}}(x) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{X}}(x) (\mathbf{A}(x) \mathbf{x} + \mathbf{B}(x) \mathbf{u}) + (\mathbf{A}(x) \mathbf{x} + \mathbf{B}(x) \mathbf{u})^T \mathbf{X}(x) \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{X}}(x) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \Delta X_{sub}(x) \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{X}(x) \mathbf{B}(x) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{X}}(x) \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{X}(x) \mathbf{B}(x) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{X}(x) \mathbf{x} \end{aligned} \quad (8)$$

$\Delta \mathbf{X}(x) < 0$ より(8)は以下の不等式で表せる。

$$\dot{V}(t) = \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{X}(x) \mathbf{x} < 0 \quad (9)$$

$V$ は下に有界であるので

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V} = 0 \quad (10)$$

よって(9)は $t \rightarrow \infty$ で0となり、 $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ となるため、(SDLE)は内部安定となることが分かる。

### 3. 腿駆動ロボットアーム

この章では腿駆動ロボットアームの運動方程式を導く。

#### 3.1 ロボットダイナミクス

一般的な $N$ 自由度ロボットダイナミクスにおいて、全リンクの運動エネルギー $T$ は以下のように表せる。

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (11)$$

ここで、 $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^N$ は関節角度ベクトル、 $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ は正定値対称の慣性行列である。位置エネルギーを $U$ として、ラグランジアン $L = T - U$ を定義すると、ラグランジェの運動方程式より以下が導ける。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} &= \mathbf{e} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (\mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right) + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} &= \mathbf{e} \\ \Rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} &= \mathbf{e} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^N$ は各関節に作用するトルクである。上式の各項を以下のように置き換える。

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) \quad (13)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} \quad (14)$$

ここで、 $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$ はコリオリ・遠心力、 $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^N$ は重力負荷を表している。よって、運動方程式は以下のようなになる。

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{e} \quad (15)$$

各関節に作用するトルク $\mathbf{e}$ において、各関節部分の粘性摩擦を考慮した場合

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} \quad (16)$$

となり、 $\boldsymbol{\tau}$ が各関節駆動力、 $\mathbf{D}$ が各関節の粘性摩擦係数を要素とする対角行列を表す。最後に、ロボットダイナミクスは以下ようになる。

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (17)$$

### 3.2 腱駆動ロボットアームの運動方程式

$N$ 自由度 $M$ 本腱駆動ロボットアーム ( $N < M$ ) において腱の伸び  $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^M$  が次の式で与えられるとする。

$$\mathbf{l}(t) = \mathbf{J}_t \mathbf{q}(t) + \mathbf{R}_a \boldsymbol{\theta}(t) > \mathbf{o} \quad (18)$$

ここで、 $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^N$  は関節角度ベクトル、 $\mathbf{J}_t \in \mathbb{R}^{M \times N}$  は関節空間から腱空間へのヤコビ行列、 $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^M$  は入力となるモータ角度ベクトル、 $\mathbf{R}_a$  はモータの出力軸のプーリ径を要素とする行列であり、 $\text{rank} \mathbf{J}_t = N$  かつ  $\mathbf{J}_t^T \mathbf{v} = \mathbf{o}$  となる正のベクトル  $\mathbf{v}$  が存在するとする。また、腱張力  $\mathbf{f}_t \in \mathbb{R}^M$  は腱の伸び  $\mathbf{l}$  の単調増加ベクトル関数  $f_t(\mathbf{l})$  によって与えられ、関節トルク  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^N$  の間には、仮想仕事の原理より

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{J}_t^T \mathbf{f}_t(\mathbf{l}), \quad f_t(\mathbf{l}) \geq 0, \quad f_t(\mathbf{o}) = \mathbf{o} \quad (19)$$

が成立する。腱張力  $\mathbf{f}_t$  は関節駆動張力  $\mathbf{f}_\tau$  とバイアス張力  $\mathbf{f}_b$  の和として表現することができる。

$$\mathbf{f}_t = \mathbf{f}_\tau + \mathbf{f}_b \quad (20)$$

$\mathbf{f}_\tau$  は関節トルクを発生させる張力である。 $\mathbf{f}_b$  は関節トルクに影響を及ぼさずに関節剛性を変化させる張力で、

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{J}_t^T \mathbf{f}_\tau, \quad \mathbf{J}_t^T \mathbf{f}_b = \mathbf{o} \quad (21)$$

が成立する。

腱駆動機構の動力学方程式は以下で与えられる。

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = -\mathbf{J}_t^T \mathbf{f}_t(\mathbf{l}) \quad (22)$$

## 4. 腱駆動ロボットアーム双線形近似モデル

この章では、3章で得られた非線形腱駆動ロボットアームを、定常値周りの双線形システムに近似させ、双線形状態方程式を導く。

### 4.1 表記・記号

便宜のため、あるベクトル  $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_N]^T$  を引数に持つベクトル値関数  $\mathbf{f}(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^A$  の偏微分に対して以下の表記を定義する。

$$\mathbf{f}'_{v_i}(\mathbf{v}_o) := \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{v})}{\partial v_i} \right|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}_o}, \quad \mathbf{f}'_{v_i}(\mathbf{v}_o) \in \mathbb{R}^A, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (23)$$

$$[\mathbf{f}'_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}_o)] := [\mathbf{f}'_{v_1}(\mathbf{v}_o) \ \dots \ \mathbf{f}'_{v_N}(\mathbf{v}_o)] \in \mathbb{R}^{A \times N} \quad (24)$$

ある行列関数  $F(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{A \times B}$  に対しては以下の表記を使う。

$$\mathbf{F}'_{v_i}(\mathbf{v}_o) := \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{v})}{\partial v_i} \right|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}_o}, \quad \mathbf{F}'_{v_i}(\mathbf{v}_o) \in \mathbb{R}^{A \times B}, \quad i=1, 2, \dots, N \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \{\mathbf{F}'_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}_o)\} \mathbf{v} &:= \{\mathbf{F}'_{v_1}(\mathbf{v}_o) \dots \mathbf{F}'_{v_N}(\mathbf{v}_o)\} \mathbf{v} \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}'_{v_i}(\mathbf{v}_o) v_i \in \mathbb{R}^{A \times B} \end{aligned} \quad (26)$$

行列  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{B \times C}$ 、ベクトル  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^B$  と (25) (26) の関係を以下のように表す。

$$\begin{aligned} \{\mathbf{F}'_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}_o) \mathbf{G}\} \mathbf{v} &:= \{\mathbf{F}'_{v_1}(\mathbf{v}_o) \mathbf{G}, \dots, \mathbf{F}'_{v_N}(\mathbf{v}_o) \mathbf{G}\} \mathbf{v} \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}'_{v_i}(\mathbf{v}_o) \mathbf{G} v_i \in \mathbb{R}^{B \times C} \end{aligned} \quad (27)$$

$$[\mathbf{F}'_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}_o) \mathbf{g}] := [\mathbf{F}'_{v_1}(\mathbf{v}_o) \mathbf{g}, \dots, \mathbf{F}'_{v_N}(\mathbf{v}_o) \mathbf{g}] \in \mathbb{R}^{B \times N} \quad (28)$$

#### 4.2 双線形モデルの導出

(22) を状態方程式にするために以下のように変形する。

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) (\mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}_t^T \mathbf{f}_t(\mathbf{l})) \quad (29)$$

上式において、定常値周りの方程式を立てる。各時間変数における定常状態周りずれは以下のようになっている。

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_o + \Delta \mathbf{q}(t), \quad \boldsymbol{\theta}(t) = \boldsymbol{\theta}_o + \Delta \boldsymbol{\theta}(t), \quad \mathbf{l}(t) = \mathbf{l}_o + \Delta \mathbf{l}(t), \quad \Delta \mathbf{l}(t) = \mathbf{J}_t \Delta \mathbf{q}(t) + \mathbf{R}_a \Delta \boldsymbol{\theta}(t) \quad (30)$$

定常状態では (18) (22) で以下の釣り合いの式が成り立つ。

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}_o) = -\mathbf{J}_t^T \mathbf{f}_t(\mathbf{l}_o), \quad \mathbf{l}_o = \mathbf{J}_t \mathbf{q}_o + \mathbf{R}_a \boldsymbol{\theta}_o \quad (31)$$

また、 $\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}_o + \Delta \mathbf{q}(t))$ 、 $\mathbf{g}(\mathbf{q}_o + \Delta \mathbf{q}(t))$ 、 $\mathbf{f}_t(\mathbf{l}_o + \Delta \mathbf{l}(t))$  は次のように表すことができる。

$$\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}_o + \Delta \mathbf{q}(t)) = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}_o) + \{\mathbf{M}^{-1}'_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_o)\} \Delta \mathbf{q}(t) \quad (32)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}_o + \Delta \mathbf{q}(t)) = \mathbf{g}(\mathbf{q}_o) + [\mathbf{g}'_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_o)] \Delta \mathbf{q}(t) \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_t(\mathbf{l}_o + \Delta \mathbf{l}(t)) &= \mathbf{f}_t(\mathbf{l}_o) + [\mathbf{f}'_{\mathbf{l}}(\mathbf{l}_o)] \Delta \mathbf{l}(t) \\ &= \mathbf{f}_t(\mathbf{l}_o) + [\mathbf{f}'_{\mathbf{l}}(\mathbf{l}_o)] \mathbf{J}_t \Delta \mathbf{q}(t) + [\mathbf{f}'_{\mathbf{l}}(\mathbf{l}_o)] \mathbf{R}_a \Delta \boldsymbol{\theta}(t) \end{aligned} \quad (34)$$

定常値周りにおける  $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  の項は、定常速度  $\dot{\mathbf{q}}_o = \mathbf{o}$  を考慮すると、(13) より以下になる。

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}_o + \Delta \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}_o + \Delta \dot{\mathbf{q}}(t)) = \mathbf{o} \quad (35)$$

(30) - (35) を (29) に適用し、 $\Delta \mathbf{q}$  と  $\Delta \dot{\mathbf{q}}$  の二次項と、 $\Delta \mathbf{q}$  と  $\Delta \dot{\mathbf{q}}$  の積は、角度変化が小さく無視できるとすると (29) は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{\mathbf{q}} &= -(\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}_o) + \{\mathbf{M}^{-1}'_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_o)\} \Delta \mathbf{q}(t)) \\ &\quad \times (\mathbf{D} \Delta \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}_o) + [\mathbf{g}'_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_o)] \Delta \mathbf{q}(t) \\ &\quad + \mathbf{J}_t^T (\mathbf{f}_t(\mathbf{l}_o) + [\mathbf{f}'_{\mathbf{l}}(\mathbf{l}_o)] \mathbf{J}_t \Delta \mathbf{q}(t) + [\mathbf{f}'_{\mathbf{l}}(\mathbf{l}_o)] \mathbf{R}_a \Delta \boldsymbol{\theta}(t))) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned}
 &= -\left( \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}_o) + \{\mathbf{M}^{-1'}(\mathbf{q}_o)\} \Delta \mathbf{q}(t) \right) \\
 &\quad \times \left( (\mathbf{g}(\mathbf{q}_o) + \mathbf{J}_t^T \mathbf{f}_t(l_o)) + [\mathbf{g}'_q(\mathbf{q}_o)] + \mathbf{J}_t^T [\mathbf{f}'_{l_i}(l_o)] \mathbf{J}_t \right) \Delta \mathbf{q}(t) + \mathbf{D} \Delta \dot{\mathbf{q}} \\
 &\quad + \mathbf{J}_t^T [\mathbf{f}'_{l_i}(l_o)] \mathbf{R}_a \Delta \boldsymbol{\theta}(t) \\
 &= -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}_o) \left( [\mathbf{g}'_q(\mathbf{q}_o)] + \mathbf{J}_t^T [\mathbf{f}'_{l_i}(l_o)] \mathbf{J}_t \right) \Delta \mathbf{q}(t) - \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}_o) \mathbf{D} \Delta \dot{\mathbf{q}} \\
 &\quad - \left( \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}_o) + \{\mathbf{M}^{-1'}(\mathbf{q}_o)\} \Delta \mathbf{q}(t) \right) \mathbf{J}_t^T [\mathbf{f}'_{l_i}(l_o)] \mathbf{R}_a \Delta \boldsymbol{\theta}(t) \\
 &= -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}_o) \left( [\mathbf{g}'_q(\mathbf{q}_o)] + \mathbf{J}_t^T [\mathbf{f}'_{l_i}(l_o)] \mathbf{J}_t \right) \Delta \mathbf{q}(t) - \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}_o) \mathbf{D} \Delta \dot{\mathbf{q}} \\
 &\quad - \left( \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}_o) \mathbf{J}_t^T [\mathbf{f}'_{l_i}(l_o)] \mathbf{R}_a + \{\mathbf{M}^{-1'}(\mathbf{q}_o) \mathbf{J}_t^T [\mathbf{f}'_{l_i}(l_o)] \mathbf{R}_a\} \Delta \mathbf{q}(t) \right) \Delta \boldsymbol{\theta}(t)
 \end{aligned}$$

これらより、定常状態周りにおける双線形系状態方程式が以下のように得られる。

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \\
 &= \mathbf{A}\mathbf{x} + (\mathbf{E} + \mathbf{F}\mathbf{x})\mathbf{u}
 \end{aligned} \tag{37}$$

このとき、各要素は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q}(t) \\ \Delta \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \Delta \boldsymbol{\theta}(t), \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}_o) \left( [\mathbf{g}'_q(\mathbf{q}_o)] + \mathbf{J}_t^T [\mathbf{f}'_{l_i}(l_o)] \mathbf{J}_t \right) & -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}_o) \mathbf{D} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{E} &= -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}_o) \mathbf{J}_t^T [\mathbf{f}'_{l_i}(l_o)] \mathbf{R}_a, \quad \mathbf{F} = -\{\mathbf{M}^{-1'}(\mathbf{q}_o) \mathbf{J}_t^T [\mathbf{f}'_{l_i}(l_o)] \mathbf{R}_a\}
 \end{aligned}$$

## 5. シミュレーション実験

本章では、4章で得た腱駆動ロボットアームの双線形近似システムに対し、2章の拡張二次形式リアプノフ候補関数によるSDRE法を適用して、3章の非線形系にてシミュレーション実験を行う。

まず、図1のような2自由度6本腱ロボットアームを制御対象として、図2の実機に当てはめた場合を考える。ただし、重力の影響を受けない水平ロボットアームであるため  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{o}$  が仮定される。また、定常状態でのシミュレーション実験のため、(35)より  $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{o}$  も仮定する。ここにおいて、各リンクの長さは  $L_1 = 0.08[\text{m}]$ 、 $L_2 = 0.122[\text{m}]$ 、重心距離は  $L_{1g} = 0.0182[\text{m}]$ 、 $L_{2g} = 0.051[\text{m}]$ 、重さは  $m_1 = 0.252[\text{kg}]$ 、 $m_2 = 0.143[\text{kg}]$ 、慣性モーメントは  $I_1 = 10^{-4} \times 3.323[\text{kgm}^2]$ 、 $I_2 = 10^{-4} \times 6.049[\text{kgm}^2]$  となっている、各関節軸のプーリ径は全て等しく  $R = 0.015[\text{m}]$ 、各モータ軸のプーリ径も全て等しく  $R_a = 0.01[\text{m}]$  である。関節角  $\mathbf{q}$ 、モータ角  $\boldsymbol{\theta}$  の各要素の単位は  $[\text{rad}]$ 、腱の伸び  $l$  の各要素の単位は  $[\text{m}]$ 、腱張力  $\mathbf{f}_t$ 、バイアス張力  $\mathbf{f}_b$  の各要素の単位は  $[\text{N}]$ 、粘性摩擦係数  $\mathbf{D}$  の各要素の単位は  $[\text{Nms/rad}]$  である。ここにおいて、(18)、(20)、(22)の各要素は以下のようになっている。

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2]^T, \quad \boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4 \quad \theta_5 \quad \theta_6]^T, \quad l = [l_1 \quad l_2 \quad l_3 \quad l_4 \quad l_5 \quad l_6]^T,$$

$$\mathbf{f}_t(l) = 10^{14} \times 2.12l^6 - 10^{12} \times 6.6l^5 + 10^{10} \times 8.03l^4 - 10^8 \times 4.38l^3 + 10^6 \times 1.27l^2 - 10^2 \times 5.63l,$$

$$\mathbf{f}_b = 5 \times [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0.005 & 0 \\ 0 & 0.005 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_t = R \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{M}(\mathbf{q}(t)) = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + 2a_3 \cos q_2(t) & a_2 + 2a_3 \cos q_2(t) \\ a_2 + 2a_3 \cos q_2(t) & a_2 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = m_1 L_{1g}^2 + m_1 L_1^2 + I_1, \quad a_2 = m_2 L_{2g}^2 + I_2, \quad a_3 = m_2 L_1 L_{2g},$$

なお、NSTによる上式  $\mathbf{f}_t(l)$  の、腱の伸び  $l$  と腱張力  $\mathbf{f}_t$  との関係は、図3のようになっている。

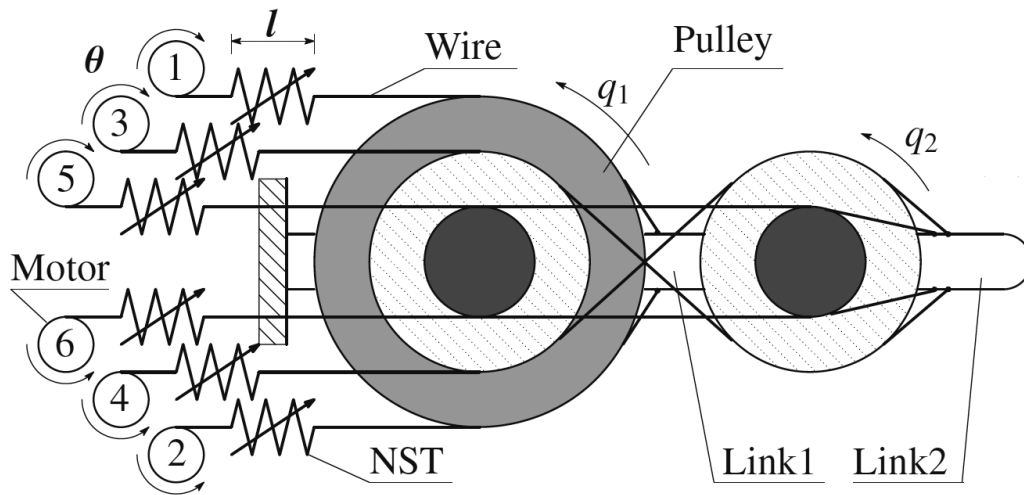


図1. 2自由度6本腱ロボットアーム(モデル)

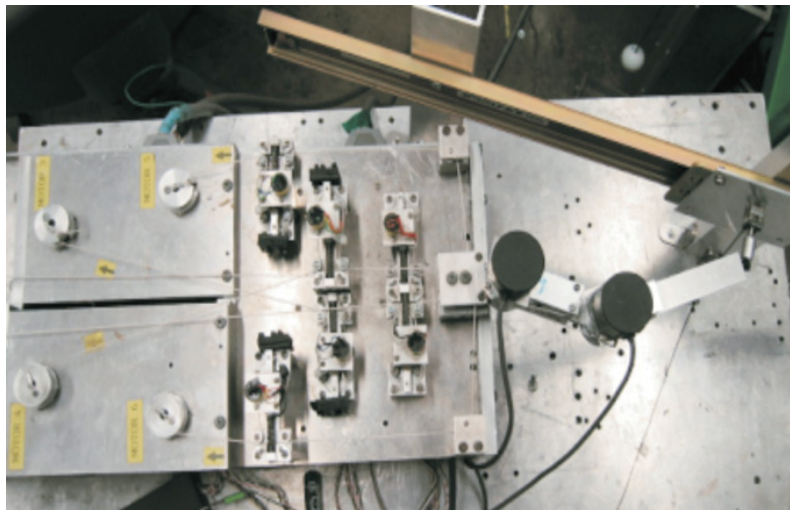


図2. 2自由度6本腱ロボットアーム(実機)

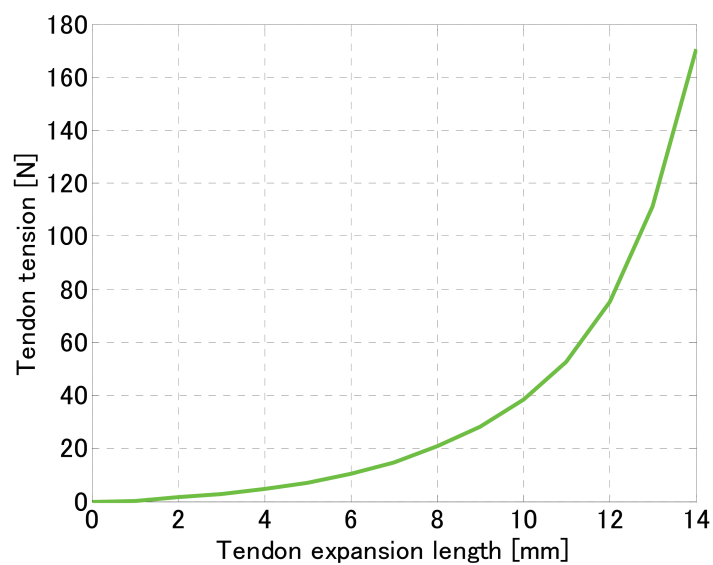


図3. 非線形バネ要素(NST)による腱の伸びと張力の関係

次に、前述のシステムを双線形系近似してSDRE法を適用する。(30)における定常状態の関節角度を $\mathbf{q}_o = [-45 \quad 90]^T$  [deg]と設定し、定常状態では外力と腱駆動トルクは発生していないものとする。この時、状態ベクトル $\mathbf{x}$ は定常角周り $\Delta q$ で以下のように表せる。

$$\mathbf{x} = [\Delta q_1 \quad \Delta q_2 \quad \Delta \dot{q}_1 \quad \Delta \dot{q}_2]^T$$

双線形モデルの各行列の数値は以下のようにになっている。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -10190 & 6797 & -2.469 & 2.469 \\ 10190 & -20880 & 2.469 & -7.584 \end{bmatrix}$$

$$B(\mathbf{x}) = E + F\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1133 & -1133 & 2266 & -2266 & -0.0009 & 0.0009 \\ -1133 & 1133 & -4613 & 4613 & 2347 & -2347 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0005 & 0.0005 & -677.1 & 677.1 & 677.1 & -677.1 \\ 677.1 & -677.1 & 2031 & -2031 & -677.1 & 677.1 \end{bmatrix} \Delta q_2(t)$$

制御性能の評価として、初期関節角度 $\mathbf{q}_i = [-45 \quad 0]^T$  [deg]から定常角度への復帰を考える。サンプリングタイム1 [ms]毎に、 $\mathbf{x}$ をSDRE (4)に代入して $\mathbf{X}$ を求め、(6)のコントローラゲインとする。SDREを解く際に使用される $\mathbf{x}$ は、(22)より実際の $\Delta q$ を使用する。重みは単位行列 $\mathbf{I}$ として、 $\mathbf{R} = 10 \times \mathbf{I}$ 、 $\mathbf{Q} = 0.001 \times \mathbf{I}$ 、とした。比較されるLQRは、双線形項を $B(\mathbf{x}) = E$ と設定し、同様の $\mathbf{R}$ と $\mathbf{Q}$ で(4)と同じリッカチ方程式を解いたゲイン $\mathbf{X}$ を使用した。図4から10に結果を示す。

図4は第2関節角度変位 $\Delta q_2$ を示している。0.3秒付近まではSDREがLQRより大きく発振しているが、その後はLQRより少し早く原点に近づいていることが分かる。図5は第1関節角度変位 $\Delta q_1$ を示している。元々初期値 $\Delta q_1(0) = 0$  [deg]であるが、第2リンクの動きに影響を受けて大きく振動している。このとき、SDREはLQRより早く発振を抑えていることが分かる。図6と8は0-0.1秒区間で、図7と9は0.1-1秒の区間で安定性の解析を行ったものである。図6と7はSDREとLQRのリアプノフ候補関数 $V$ である $\mathbf{x}^T \mathbf{X}(\mathbf{x}) \mathbf{x}$ と、 $\mathbf{x}^T \mathbf{X} \mathbf{x}$ を示している。0-0.1秒区間ではポテンシャルはSDREのほうがLQRより大きい、0.1-1秒区間ではSDREのほうがLQRより小さくなっていることが分かる。SDREにおいても、 $V$ の傾きが上向き $\dot{V} > 0$ 不安定を示す部分が多くみられる。この原因に対し、図8と9で $\dot{V}(t) = \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{X}(\mathbf{x}) \mathbf{x}$ を調べてみる。0-0.1秒区間において、 $\mathbf{x}^T \Delta \mathbf{X}(\mathbf{x}) \mathbf{x} > 0$ がかなり大きく見られる。これは $\Delta \mathbf{X}(\mathbf{x})$ において、 $\dot{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ が正定 $\dot{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) > 0$ となる区間が大きく影響していることを示している。0.1-1秒区間において、すべて $\mathbf{x}^T \Delta \mathbf{X}(\mathbf{x}) \mathbf{x} < 0$ を示している。図6と7における $V$ の傾き $\dot{V}$ の正負と、図8と9における $\mathbf{x}^T \Delta \mathbf{X}(\mathbf{x}) \mathbf{x}$ の正負が同期していない。この理由は(8)において $\dot{V} = \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{X}(\mathbf{x}) \mathbf{x}$ と定める過程において、実際のシステムを双線形系 $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u}$ と近似した際のモデル化誤差が大きいことを示している。最後に、操作された6本腱の伸びを図10に示す。バイアス張力で腱剛性を保ちながら関節駆動張力を操作できていることがわかる。

## 6. 結 言

本論文では、腱駆動ロボットアームを双線形系近似したモデルに対して拡張二次形式を用いたSDRE法を適用した。その結果、LQRとの比較において性能の向上が見られて、各時刻における安定性を視覚的に示すことができた。また、この双線形系近似システムに対するSDRE法が、モデル化誤差により安定性を完全に表現できていない事が分かった。

今後は本システムを状態依存型線形表現へ完全移行して、SDRE法の適用を行う予定である。



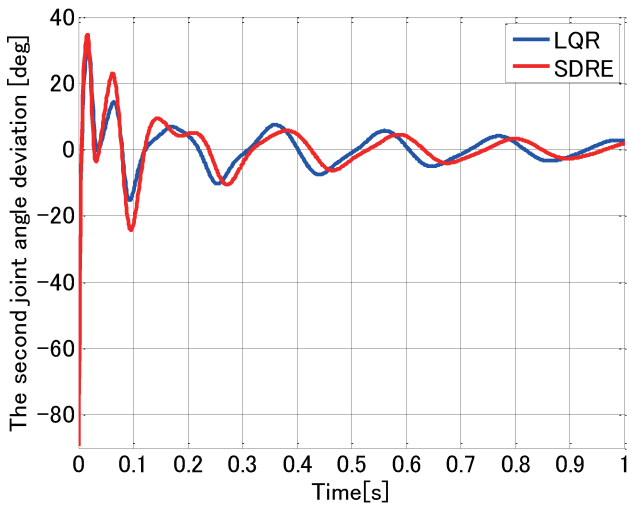


図4. 第2関節角度変位 $\Delta q_2$

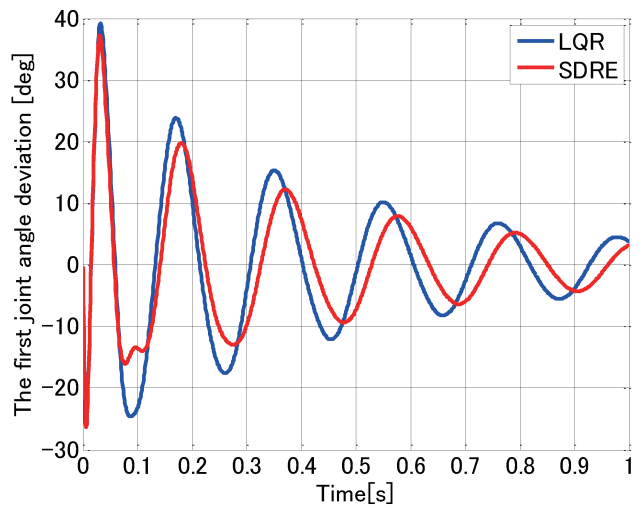


図5. 第1関節角度変位 $\Delta q_1$

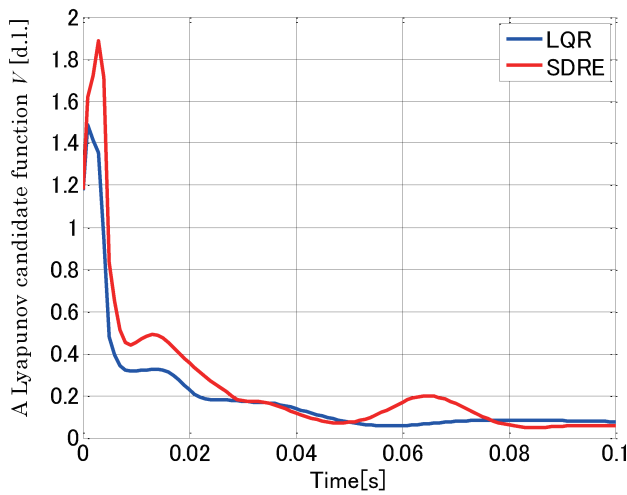


図6. 0~0.1秒区間のリアプノフ候補関数 $V$   
SDRE:  $x^T X(x)x$ , LQR:  $x^T Xx$

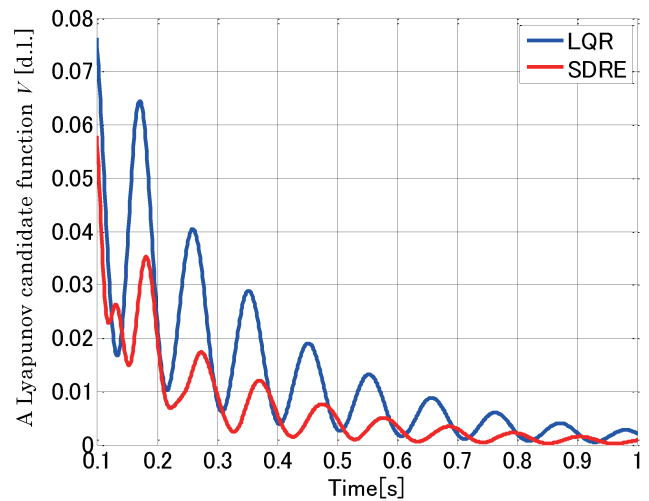


図7. 0.1~1秒区間のリアプノフ候補関数 $V$   
SDRE:  $x^T X(x)x$ , LQR:  $x^T Xx$

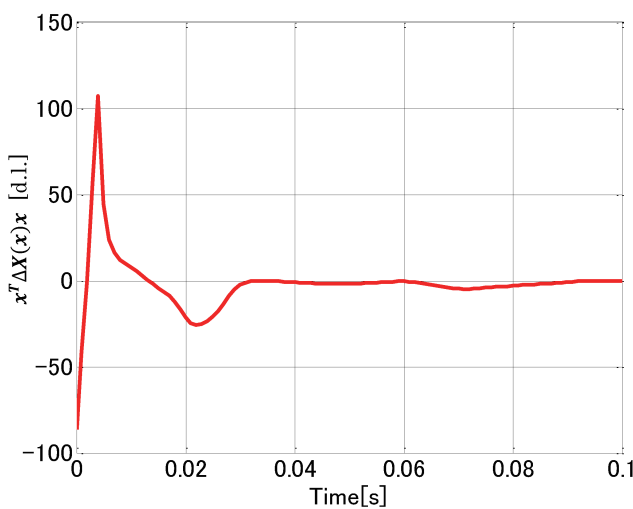


図8. 0~0.1秒区間の  $x^T \Delta X(x)x$

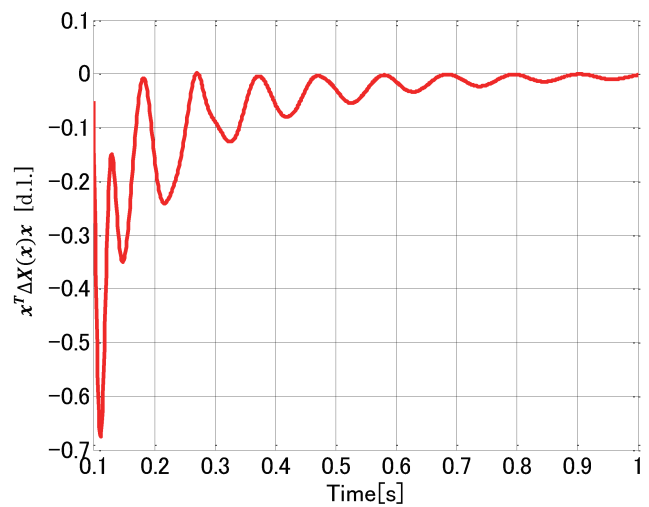


図9. 0.1~1秒区間の  $x^T \Delta X(x)x$

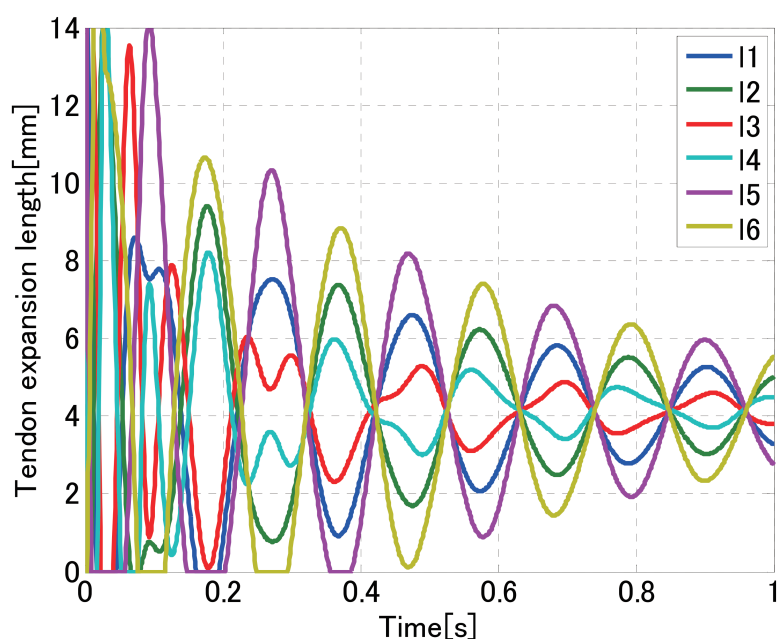


図10. 腱の伸び*l*

参考文献

- 1) J. R. Cloutier, C. N. D 'Souza and C. P. Mracek, "Nonlinear Regulation and Nonlinear  $H_{\infty}$  Control via the State-Dependent Riccati Equation Technique. Part 1, Theory; Part 2, Examples", Proceedings of the International Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace, pp. 117-142, 1996.
- 2) 鈴木聡 "状態依存型リカッチ制御の理論と実用性", 計測と制御, Vol. 44, No. 2, pp. 147-152, 2005.
- 3) Tayfun Cimen, "Systematic and effective design of nonlinear feedback controllers via the state-dependent Riccati equation (SDRE) method," Annual Reviews in Control, Vol. 34, No. 1, pp. 32-51, 2010.
- 4) S. Sasaki and K. Uchida, "Nonlinear  $H_{\infty}$  Control System Design via Extended Quadratic Lyapunov Function", Proceedings of the 4th IFAC Nonlinear Control Systems Design Symposium, Enschede The Netherlands, pp. 163-168, 1998.
- 5) S. Nakayama, "A SDRE Method based on Extended Quadratic Lyapunov Function for an Inverted Pendulum," SICE Annual Conference 2013, pp.697-702, 2013.
- 6) 登坂博和, 兵頭和人, 小林博明, "腱駆動機構における小型非線形バネ弾性要素の開発," 神奈川工科大学研究報告, B-27, pp.121-126, 2003.
- 7) 兵頭和人, 小林博明, "非線形バネ要素を持つ腱制御手首機構の研究," 日本ロボット学会誌, Vol. 11, No. 8, pp.1244-1251, 1993.
- 8) 小澤隆太, 小林博明, "腱に非線形弾性をもつ腱駆動システムの制御," 日本ロボット学会誌, Vol. 17, No. 2, pp. 275-281, 1999.
- 9) 中山信, 小林博明, "SDRE・SDRI 手法を用いた腱駆動ロボットアームに対する双線形 $H_{\infty}$ 状態フィードバック制御器," 第55回自動制御連合講演会, pp.1318-1321, 2012.

(2015年10月30日 受理)