

研究タイトル：不定方程式を連立方程式を作って解く



氏名：	高木和久 / TAKAGI Kazuhisa	E-mail：	ktakagi@ge.kochi-ct.ac.jp
職名：	准教授	学位：	理学修士(名古屋大学)
所属学会・協会：	日本数学教育学会, 教育システム情報学会		
キーワード：	不定方程式、連立方程式		
技術相談提供可能技術：	数学教育		

研究内容：中学生にも分かる方法で不定方程式の整数解を求める

2022年1月16日に実施された大学入学共通テストの数学Ⅱ・数学A第4問(4)は難問とされているが、実は簡単に解くことのできる問題である。

【問題】 $11^5x - 2^5y = 1$ の整数解のうち、 x が正の整数で最小になる場合の x, y の値を求めよ。

【解】 11^5 を $2^5 = 32$ で割ったときの商を q 、余りを r とすると $q = 5032, r = 27$ である。

$11^5x - 2^5y = 1$ は行列式を用いて $\begin{vmatrix} x & 2^5 \\ y & 11^5 \end{vmatrix} = 1$ と表すことができる。

$\begin{cases} x = 2^5 \\ y = 11^5 \end{cases}$ を出発点にして、右辺の数が小さい連立方程式を作ってゆく。

$$\begin{cases} x = 32 \\ y = 11^5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 32 \\ y - qx = 27 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (q+1)x - y = 5 \\ y - qx = 27 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (q+1)x - y = 5 \\ 6y - (6q+5)x = 2 \end{cases}$$

もし

$$\begin{cases} (q+1)x - y = 3 \\ 6y - (6q+5)x = 1 \end{cases} \dots (\star)$$

の解が存在したとすると、

$$\begin{vmatrix} x & 2^5 \\ y & 11^5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (q+1)x - y & 5 \\ 6y - (6q+5)x & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

であるので (\star) の解 x, y は $11^5x - 2^5y = 1$ を満たす。

そして、 (\star) の解 x, y は

$$\begin{vmatrix} (q+1)x - y & 3 \\ 6y - (6q+5)x & 1 \end{vmatrix} = 0$$

を満たすので

$$(q+1)x - y = 18y - 3(6q+5)x$$

$$\therefore (19q+16)x = 19y$$

$x = 19, y = 19q + 16 = 95624$ は求める整数解である。