

動画や動的オブジェクトを含む
数学のCBT問題の試作

高木 和久*

Computer-Based Testing of Mathematics with Dynamic Objects

Kazuhisa TAKAGI*

Summary

Two years ago, Central Council for Education advocated that all high school students should take Computer-Based Testing. In foreign countries such as United States, CBT of mathematics often uses short movies or dynamic objects. On the other hand, few Japanese high school students have experienced such kind of tests. In this paper some kinds of mathematics problems for CBT with short movies or dynamic objects are shown.

Key Words : Computer-Based test, dynamic object, Mathematics

1. まえがき

CBTとはComputer-Based Testingの略で、問題の提示や回答を全てコンピュータを用いて行う試験である。2016年現在で日本ではITパスポート試験などの多くの資格試験がCBTで行われている。

ところで、中央教育審議会の平成26年12月22日の答申([1])では、高等学校および大学の教育に関して次のような改革が提言されている。

- 現行の大学入試センター試験を廃止し、大学入学希望者学力評価テスト（仮称）を新たに実施する。この試験はCBT方式での実施を前提に、出題・解答方式の開発を行う。
- 全ての高校生について、身に付けるべき資質・能力を確実に育み、生徒の学習意欲の喚起、学習の改善を図ることができるよう、高等学校段階の基礎学力を評価する新テスト「高等学校基礎学力テスト（仮称）」を導入する。
- 対象教科・科目については、実施当初は「国語総合」「数学Ⅰ」「世界史」「現代社会」「物理基礎」「コミュニケーション英語Ⅰ」などの高等学校の必修科目28を想定して検討する。
- CBT方式での実施を前提に、出題・解答方式の開発等を行う。
- 「高等学校基礎学力テスト（仮称）」と「大学入学希望者学力評価テスト（仮称）」について一体的な検討を行い、「高等学校基礎学力テスト（仮称）」については平成31年度から、「大学入学希望者学力評価テスト（仮称）」については平成32年度から段階的に実施する。
- 「大学入学希望者学力評価テスト（仮称）」における思考力・判断力・表現力を問う問題については、求められる力を、「教科型」において他教科の内容を掛け合わせつつ評価する問題と、

* 高知工業高等専門学校ソーシャルデザイン工学科准教授

「合教科・科目型」「総合型」として教科・科目の枠を越えて評価する問題の両方について、国が主導して検討を行い、平成28年度中を目途に作問イメージを公表し、平成32年度から実施すること。

今年度中に作問イメージが公表され、CBT試験実施に向けて本格的な動きが始まることになる。数学のCBT試験についてはアメリカでは既に行われており、動画や動的オブジェクトを利用して受検生に問題を解かせるものもある。([2])

しかし国内では数学のCBT試験を実施している学校はごくわずかであり、その中でも動画や動的オブジェクトの利用はほとんど見られないのが実情である。

また、高等学校において普段の授業の中で動画や動的オブジェクトを利用しながら問題を解く実践例が日本ではほとんどない。つまり多くの生徒がCBT試験を受検して初めて動的オブジェクトを体験することになり、この点の改善も急務である。

CBT試験の利点は複数回受検ができることであるが、それは問題作成者側からすると、用意する問題の数が従来の紙ベースの試験の数倍必要になるということでもある。社会全体の変革が急激に行われようとする中で、数学教育に関して今、日本で最も必要とされているのはCBT試験に対応した問題の数を増やすことである。

紙による出題と回答には長い歴史と問題の蓄積があるが、動画や動的オブジェクトの利用に関しては高等学校はもとより大学等でも実践例がほとんどないのが現状である。本研究では、これまでの紙ベースの試験では出題されなかった新しいタイプの問題を色々と考案し、CBT試験の利点を生かす教育方法について検討する。

2. 動的オブジェクトを利用する意義

これまでの数学のテストは紙に問題を印刷したものをを用いて行われた。例えば、放物線に関する次の問題を見てみよう。

例題1 頂点が原点で、焦点が点(1, 0)である放物線の方程式を次の選択肢の中から選べ。

1. $y^2 = 4x$
2. $y^2 = -4x$
3. $x^2 = 4y$
4. $x^2 = -4y$

解答 焦点がx軸上の点であることからこの放物線の軸はx軸である。よって正解は1か2のどちらかである。2ではxの値は0以下に制限され、焦点のx座標が正になることはない。よって正解は1である。 (終)

将来的に全ての高校生が到達度試験を受けることになるが、上記の説明では理解できない生徒が多数いることが予想される。低学力の生徒のためには視覚的、直観的に理解できる解説が必要とされる。

図1はJavaScriptを用いて作成した動的オブジェクトである。点Aを頂点、点Bを焦点とする放物線が描かれている。点A,Bはマウスまたは指でドラッグすることにより位置を変える事ができ、放物線も点A,Bの移動に伴って動的に再描画される。(図2)

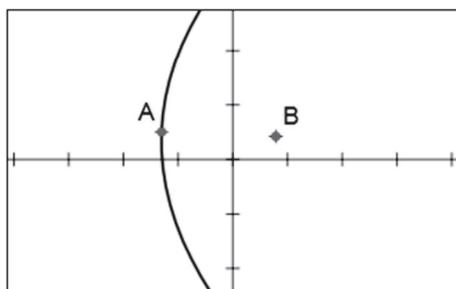


図1. 例題1の動的オブジェクト

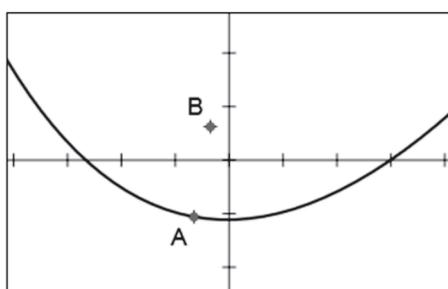


図2. 2点A, Bの位置を変えることができる

2点A, Bを問題に指定された場所に移すことにより、方程式がわからなくても題意を満たす放物線のグラフ(図3)を見ることが出来る。図3の放物線のグラフは点(1, 2)を通っているように見える。選択肢1~4の中でグラフが点(1, 2)を通るものは1のみであるので正解が1であることがわかる。

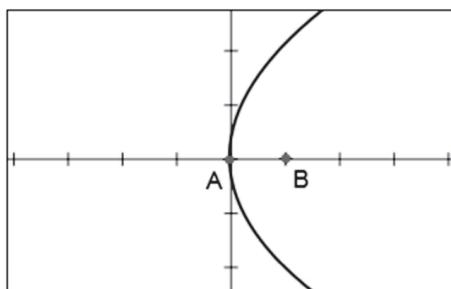


図3. 頂点が原点で、焦点が点(1, 0)である放物線

従来の紙によるテストでは正解できなかった生徒でも動的オブジェクトを利用することで正解に辿りつくことができた。このような能力は従来のペーパーテストでは測ることができないためこれまで考慮されてこなかったが、動的オブジェクトを含むCBT試験の導入により、新たな問題解決能力として今後研究の対象になることが考えられる。

3. 動画を含む問題の例

角柱の体積を定積分を用いて求める次の問題のために動画を作成した。(図4)

例題2 図4の5角柱は高さが7、底面の面積が21である。この角柱の体積を定積分を用いて求めよ。

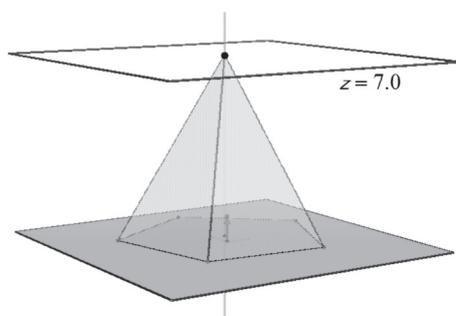


図4. 平面による角柱の切断

解答 角柱を xy 平面に水平な平面 $z = 7 - t$ で切った切り口の面積を $S(t)$ とおくと、

$$t^2 : 7^2 = S(t) : 21$$

$$\therefore S(t) = \frac{3}{7} t^2$$

5角柱の体積は

$$\int_0^7 S(t) dt = \left[\frac{1}{7} t^3 \right]_0^7 = 7^2 = 49$$

(終)

立体の切断図はCabri3D v2 という有料のソフトウェアを用いて作成した。このソフトウェアにはアニメーションの機能があり動画を作成することができるが、この動画はソフトウェアをインストールしたパソコンでしか再生できない。そこで、Cabri3Dで動画を再生させてパソコンの画面をキャプチャする方法で動画を作成した。(図5)

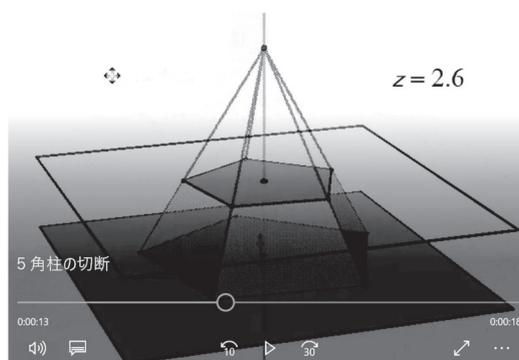


図5. 動画の1画面

次の問題は微分積分の多くの教科書が採用している標準的な問題である。

例題3 原点を中心とする、 xy 平面上の半径 a の円を底面とする円柱がある。この円柱と平面 $z = y$ および xy 平面ではさまれてできる立体の体積を求めよ。

解答 2点 $(-a, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$ を結ぶ線分と平面 $x = t$ との交点を P とすると、点 P の座標は $(t, 0, 0)$ である。また、平面 $x = t$ と円 $x^2 + y^2 = a^2$ の交点を Q 、2平面 $z = y, x = t$ の交線と円柱との交点を R とすると $PQ = QR$ が成り立つ。よってこの立体を平面 $x = t$ で切った切り口は直角二等辺三角形である。(図6)

$OQ = \sqrt{a^2 - t^2}$ であるから三角形 PQR の面積は

$$\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 - t^2})^2 = \frac{1}{2}(a^2 - t^2)$$

となるので、この立体の体積は

$$\int_{-a}^a \frac{1}{2}(a^2 - t^2) dt = 2 \int_0^a \frac{1}{2}(a^2 - t^2) dt = \frac{2}{3} a^3$$

(終)

立体の形状がわからずにこの問題を解けない学生は多い。そこで3方向から見た立体の図を作成し、点 P を動かして切り口の図形が変化する様子を観察できるようにした。(図6)

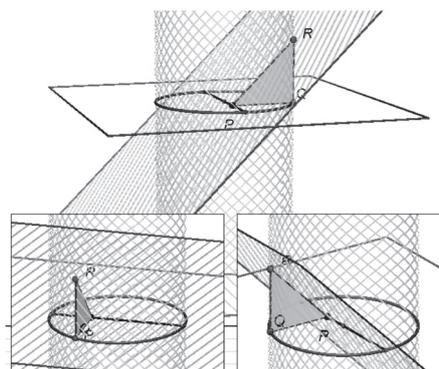


図6. 動画の1画面

4. 数学教育に関する論文に基づく問題の例

4.1 算術平均と調和平均の関係

この章では、過去に執筆された数学教育に関する論文に基づく、通常は考えつかない内容の動的オブジェクトの例を挙げる。

2つの正の実数 a, b に対して、 $\frac{a+b}{2}$ を a, b の算術平均、 $\frac{2ab}{a+b}$ を a, b の調和平均という。不等式 $\frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2}$ を算術平均と調和平均の関係と呼ぶ。この不等式は $a = b$ のときに限り等号が成立する。この不等式の証明は通常は式変形のみで行われるが、直線と双曲線を用いて視覚的に証明することができる。([10])

例題4 a, b を正の実数とし、座標が (a, b) である点を P とする。

1. 直線 $x + y = k$ が点 P を通るとき、この直線と直線 $y = x$ との交点 Q の座標を求めよ。
2. 曲線 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{k}$ が点 P を通るとき、この曲線と直線 $y = x$ との交点 R の座標を求めよ。
3. $x, y > 0$ のとき、条件 $(x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = 4$ を満たす点 $P(x, y)$ の軌跡の方程式を求めよ。

解答 (1) $Q \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2} \right)$ (2) $R \left(\frac{2ab}{a+b}, \frac{2ab}{a+b} \right)$ (3) $y = x, x > 0$

Q, R は直線 $y = x$ 上の点である。点 P が直線 $y = x$ 上にはないときは Q は R よりも右上にあり、 $\frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2}$ が成り立つ。また点 P が直線 $y = x$ 上にあるときは3点 P, Q, R は一致し、 $\frac{2ab}{a+b} = \frac{a+b}{2}$ が成り立つ。点 $P(a, b)$ をドラッグして移動させることにより算術平均と調和平均の関係が学生が能動的に確かめることができる。(図7, 8)

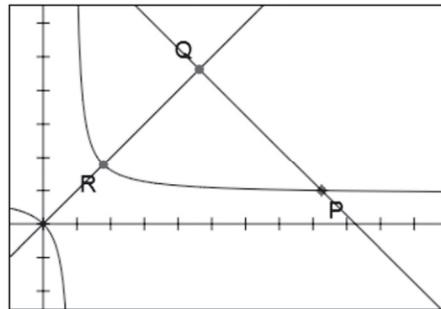


図7. 点 P が直線 $y = x$ 上にはないとき

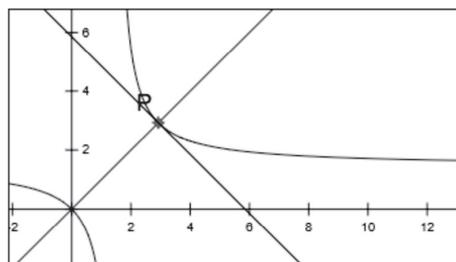


図8. 点 P が直線 $y = x$ 上にあるとき

4.2 三角方程式 $\sin 2\theta = \sin \theta$ を解く

$\sin \theta = \frac{1}{2}$ のような三角方程式は単位円を用いて幾何的に解くのが普通であるが、 $\sin 2\theta = \sin \theta$ のような三角方程式は式の変形のみで解く。しかし、このような三角方程式を円と直線を用いて幾何的に解くことができる。

単位円上の点は $P(\cos \theta, \sin \theta)$ と表すことができ、円 $x^2 + y^2 = 2x$ 上の点は $Q(2 \cos^2 \theta, \sin 2\theta)$ と表すことができる。 P と Q の y 座標が一致する点を探すことにより、方程式 $\sin 2\theta = \sin \theta$ の解を求めることができる。([5], [6])

- 例題5 (1) 直線 $y = x \tan \theta$ と円 $x^2 + y^2 = 2x$ の交点のうち、原点でない方の点 Q の座標を求めよ。
 (2) $\sin 2\theta = \sin \theta$ の解を $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で求めよ。
 (3) $\sin 2\theta > \sin \theta$ の解を $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で求めよ。

解答 (1) $(2 \cos^2 \theta, \sin 2\theta)$ (2) $\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$ (3) $0 < \theta < \frac{\pi}{3}, \pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$

(3)のような三角不等式を式変形のみで解くのはかなり難しいが、動的オブジェクトを用いると2点 P, Q の y 座標を比較することにより簡単に解を求めることができる。(図9,10)

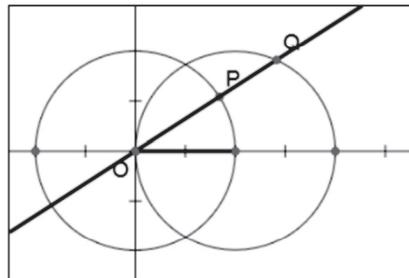


図9. 直線 $y = x \tan \theta$ と2円

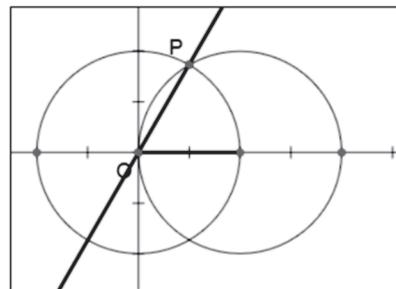


図10. $\sin 2\theta = \sin \theta$ が成り立つとき

4.3 角が最大になる点を探す問題

ラグビーの人気の高まるにつれて、そのルールもよく知られるようになってきた。図11の A, B はゴールの両端を表す。点 C の位置にトライが決まったとき、次に行われるコンバージョンキックは点 C を通り AB に垂直な半直線上の好きな位置で行うことができるが、 $\angle APB$ が最大である地点で行うのが最適である。([12]) 動的オブジェクトを操作して円の半径や点 P の位置を変えることにより、キックを行う最適な位置を見つけることができる。

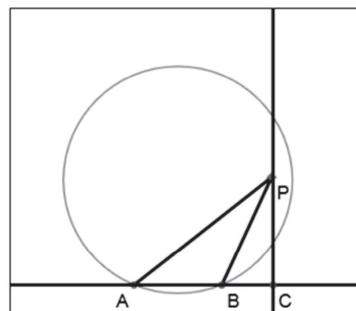


図11. 点 P の位置と円の半径を変えてキックの位置を探す

例題 6 x 軸上に 3 点 A, B, C がこの順に並んでいる。点 P は点 C を通り x 軸に垂直な直線 l 上にある。 $\angle APB$ が最大になるときの点 P の位置を求めよ。

解答 点 A, B を通り直線 l と接する円を考える。(図12) 点 P が接点の位置にあるとき $\angle APB$ が最大になる。(終)

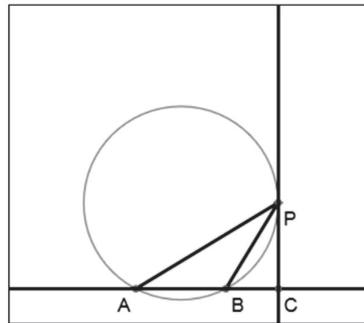


図12. $\angle APB$ が最大になる点

5. 考 察

数学の問題には複数の解法が存在することが多い。次の例題で考えてみよう。

例題 7 x, y を実数とする。点 $P(x, y)$ が領域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 内の点である時、 $x + y$ の最大値、最小値とその時の x, y の値を求めよ。

解答 $x + y = k$ とおくと k は直線 $y = -x + k$ の y 切片に等しい。平面上の点 $P(x, y)$ を通る傾き -1 の直線を考えてこの直線の y 切片が $x + y$ の値に等しい。(図13)

点 P が領域 D 内の点である時、 y 切片が最大になるのは点 P が直線 $y = -x + k$ と円の接点になっている時(図14)で、このとき点 P は直線 $y = x$ 上にある。連立方程式 $x^2 + y^2 = 1, x = y$ を解くことにより、 $x + y$ は $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最大値 $\sqrt{2}$ をとる。同様にして $x = y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最小値 $-\sqrt{2}$ をとる。(終)

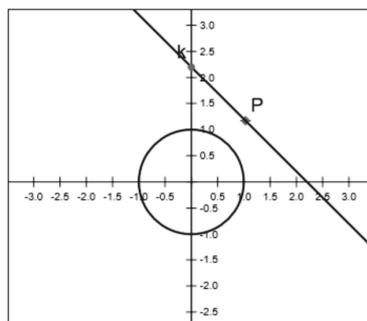


図13. 単位円と直線 $y = -x + k$

図13はこの例題のための動的オブジェクトである。マウスまたは指でドラッグすることにより、点 P の位置を領域 D の中で動かして y 切片が最大または最小になる場所を探す。しばらく試行錯

誤することにより、図14の点Pの位置で約1.4の最大値をとることがわかる。このとき点Pのx座標とy座標が等しくなることから点Pの座標を求めることができる。

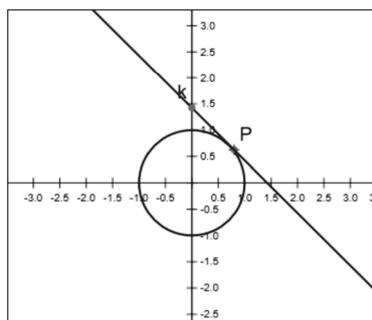


図14. $x+y$ の値が最大になる点Pの位置

通常、教科書や問題集ではこの解法を採用している。しかしこの問題は平面ベクトルの内積を用いて次のように解くことができる。

別解 座標が(1,1)である点をAとする。このとき平面上の任意の点 $P(x,y)$ に対して、 $\vec{OP} \cdot \vec{OA} = x+y$ が成り立つから、 $x+y$ が最大になるのは \vec{OP} と \vec{OA} が同じ向きの時、即ち $y=x$ のときであるから、 $x+y$ は $x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最大値 $\sqrt{2}$ をとる。また、 $x+y$ が最小になるのは \vec{OP} と \vec{OA} が反対向きの時、即ち $y=-x$ のときであるから、 $x+y$ は $x=y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最小値 $-\sqrt{2}$ をとる。

(終)

別解に基づく動的オブジェクトを作ると図15、図16のようになる。この解法の方が条件 $x=y$ を自然に導くことができる。

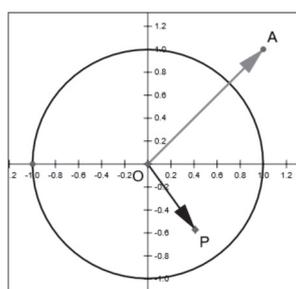


図15. 2つのベクトル

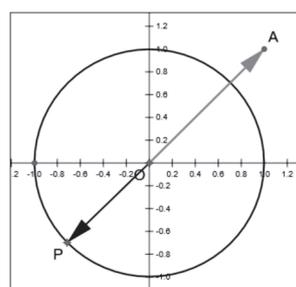


図16. $x+y$ が最小になる点Pの位置

従来の紙ベースの試験の場合は問題のみの出題であったから解答者は自由に解法を選ぶことができた。CBT試験で動的オブジェクトが使えるようになったことには色々なメリットがあるが、その一方で動的オブジェクトをどのように作るかによって、特定の解法を解答者に強要することになるというデメリットも生じることを認識する必要がある。

6. おわりに

ここで紹介したものはこれまでに作成した問題のごく一部である。なお本研究は日本学術振興会の科学研究費(課題番号16K00993)“スマートデバイスによる動画再生を活用する高専数学の実践的研究”の補助を受けて行われた。

参考文献

- (1) 中央教育審議会答申:新しい時代にふさわしい高大接続の実現に向けた高等学校教育, 大学教育, 大学入学者選抜の一体的改革について, 平成26年12月22日
- (2) Pearson Education Mathematics Practice Tests: <https://parcc.pearson.com/practice-tests/math/>
- (3) 高木和久:三角関数の加法定理のエレガントな証明, 数研通信No.70 P.21, 数研出版, 2011
- (4) 高木和久:動的幾何ソフトを用いた単相交流回路の解説, 教育システム情報学会研究報告 vol. 26 No.4, PP.32-37, 2011
- (5) 高木和久:点と直線の符号付き距離を用いた三角方程式の新解法, 平成24年度全国算数・数学教育研究(福岡)大会総会特集号 P.621, 2012
- (6) 高木和久:点と直線の符号付き距離と三角方程式・不等式, 高知高専学術紀要第58号, PP.39-49, 2013
- (7) 高木和久:関数のグラフの双方向的なアニメーションの作成について, 日本高専学会第19回年会講演会講演論文集PP.35-36, 2013
- (8) Kazuhisa Takagi: Show Students Geometric Solutions of Trigonometric Equations by Turtle Graphics, the 7th International Symposium on Advances in Technology Education 2013, proceedings of ISATE 2013 PP.378-381
- (9) 高木和久:対称性を用いた2次形式の標準化, 初等数学第73号, PP.61-64, 2014
- (10) 高木和久:スーパーだ円を用いたQM-AM-GM-HM不等式の証明, 第19回高専シンポジウム講演論文集P.162, 2014
- (11) 高木和久:座標軸の追加による2次形式の標準化について, 高知高専学術紀要第59号, PP.31-39, 2014
- (12) 松田康雄:有利なキックは,初等数学第71号 PP.45-47, 2013

受理日:2016年10月28日